Compléments sur les espaces vectoriels

1. Contexte.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
n est un entier naturel non nul.
E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Somme d'espaces vectoriels

2. Contexte. Soient un entier $p \geqslant 2$ et des sous-espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_p$ de E.

Produit

3. Définition. Le *produit* de $E_1, \ldots, E_p$ est l'ensemble noté $E_1 \times \cdots \times E_p$ ou $\prod_{i=1}^p E_i$ des p-uplets $(x_1, \ldots, x_p)$ où $x_i \in E_i$ pour $i \in [\![1, p]\!]$.

4. Théorème. Le produit $\prod_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E^p.

5. Théorème. L'application

$$\varphi : \prod_{i=1}^p E_i \to E,\ (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i$$

est linéaire.

6. Théorème. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimensions finies, leur produit l'est aussi et l'on a

$$\dim\left(\prod_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

Somme

7. Définition. La *somme* de $E_1, \ldots, E_p$ est l'ensemble noté $E_1 + \cdots + E_p$ ou $\sum_{i=1}^p E_i$ des sommes $x_1 + \cdots + x_p$ où $(x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i$. Autrement dit,

$$\sum_{i=1}^p E_i = \left\{ x \in E \mid \exists (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i,\ x = \sum_{i=1}^p x_i \right\}.$$

8. Théorème. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

9. Théorème. Si $E_1, \ldots, E_p$ sont de dimensions finies, leur somme l'est aussi et l'on a

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

Somme directe

10. Définition. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est *directe* si tous ses éléments se décomposent de façon unique comme somme d'éléments des E_i. Dans ce cas, on la note

$$E_1 \oplus \cdots \oplus E_p \quad \text{ou} \quad \bigoplus_{i=1}^p E_i.$$

11. Théorème. Il est équivalent de dire :

(i) la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe ;

(ii) $\forall x \in \sum_{i=1}^p E_i,$
$$\exists! (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i,\ x = \sum_{i=1}^p x_i\,;$$

(iii) φ est injective ;

(iv) $\forall (x_1, \ldots, x_p) \in \prod_{i=1}^p E_i,$
$$\sum_{i=1}^p x_i = 0_E \Longrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i = 0_E.$$

12. Définition. Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont *supplémentaires* si $E = F \oplus G$.

13. Théorème. Supposons $E_1, \ldots, E_p$ de dimensions finies. La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe si et seulement si

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

Bases adaptées

14. Contexte. Supposons *ici* que E est de dimension finie.

15. Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Une base de E *adaptée à* F est une base obtenue en complétant une base de F.

16. Définition. Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$, une base de E *adaptée à cette somme directe* est une base obtenue en concaténant des bases de chaque E_i.

T.S.V.P.

Sous-espaces stables

17. Contexte. Soient u un endomorphisme de E, et F un sous-espace vectoriel de E.

18. Définition. F est *stable par* u si $u(F) \subset F$. Dans ce cas, l'endomorphisme de F

$$u\|_F : F \to F,\ x \mapsto u(x)$$

s'appelle l'*endomorphisme induit par* u *sur* F.

19. Théorème. F est stable par u si et seulement s'il existe une base de E adaptée à F dans la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs.

20. Théorème. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$.

Les E_i sont tous stables par u si et seulement s'il existe une base de E adaptée à la somme directe dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs.

21. Théorème. Si deux endomorphismes de E commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

Trace

22. Définition. Soit $A = (a_{ij})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

La *trace de* A est le nombre

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

La *trace* est l'application

$$\mathrm{Tr} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},\ A \mapsto \mathrm{Tr}(A).$$

23. Théorème. La trace est linéaire. Autrement dit, pour tous $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{Tr}(A + \lambda B) = \mathrm{Tr}(A) + \lambda\,\mathrm{Tr}(B).$$

24. Théorème. Pour tout $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$,

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA),$$
$$\mathrm{Tr}(A^\top) = \mathrm{Tr}(A).$$

25. Théorème. Deux matrices semblables ont même trace. On dit que la trace est invariante par *similitude*.

26. Contexte. Supposons *ici* que E est de dimension finie.

27. Définition. Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$. La *trace de* u est la trace de n'importe laquelle de ses matrices.

28. Théorème. Pour tous $(u, v) \in (\mathfrak{L}(E))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\mathrm{Tr}(u + \lambda v) = \mathrm{Tr}(u) + \lambda\,\mathrm{Tr}(v),$$
$$\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u).$$

Polynômes de matrices et d'endomorphismes

Polynômes de matrices

29. Définitions. Soient $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Posons $A^0 = I_n$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{k+1} = A\,A^k$.

Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, posons $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.

Sinon, écrivons $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, et posons

$$P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k.$$

Cette matrice s'appelle un *polynôme en* A.

30. Théorème. Pour tous $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + \lambda Q)(A) = P(A) + \lambda Q(A),$$
$$(PQ)(A) = P(A)\,Q(A).$$

31. Corollaire. Les polynômes en A commutent.

32. Définition. Un *polynôme annulateur de* A est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.

Polynômes d'endomorphismes

33. Définitions. Soient $u \in \mathfrak{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Posons $u^0 = \mathrm{id}_E$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{k+1} = u \circ u^k$.

Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, posons $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$.

Sinon, écrivons $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, et posons

$$P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k.$$

Cet endomorphisme s'appelle un *polynôme en* u.

34. Théorème. Pour tous $(P, Q) \in (\mathbb{K}[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(P + \lambda Q)(u) = P(u) + \lambda Q(u),$$
$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

35. Corollaire. Les polynômes en u commutent.

36. Définition. Un *polynôme annulateur de* u est un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(u) = 0_{\mathfrak{L}(E)}$.