Compléments sur les séries numériques

1. Contexte. Considérons une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire une suite réelle ou complexe.

Absolue convergence, sommabilité

2. Définitions. La série $\sum u_n$ est *absolument convergente* ou *converge absolument* si la série $\sum |u_n|$ converge. On dit aussi que la suite (u_n) est *sommable*.

3. Théorème. Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors elle converge. La réciproque est fausse.

4. Théorème : règle de d'Alembert.
Supposons que
- ∘ $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang ;
- ∘ $\lim\limits_{n\to+\infty} |\frac{u_{n+1}}{u_n}| = \ell \in [0,+\infty]$.

Alors
- si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument ;
- si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;
- si $\ell = 1$, la règle ne conclut pas.

5. Contexte. Considérons une seconde suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. Définition. Le *produit de Cauchy* des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général

$$\sum_{p+q=n} u_p\,v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p\,v_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} u_{n-q}\,v_q.$$

7. Théorème. Supposons les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ absolument convergentes. Alors leur produit de Cauchy converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_p\,v_q\right) = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right).$$

8. Formule de Stirling. Quand n est grand,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Semi-convergence

9. Définition. La série $\sum u_n$ est *semi-convergente* si elle converge sans converger absolument.

10. Contexte. Considérons dorénavant que la suite (u_n) est réelle.

11. Définition. La série $\sum u_n$ est *alternée* si la suite de terme général $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

12. Théorème spécial des séries alternées.
Supposons que
- ∘ la série $\sum u_n$ est alternée ;
- ∘ la suite de terme général $|u_n|$ décroît vers 0.

Alors
- la série $\sum u_n$ converge ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|R_n| \leqslant |u_{n+1}|$, où R_n est le reste d'ordre n de la série ;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de u_{n+1} ; en particulier, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du signe de u_0.