Espaces vectoriels normés

Normes

1. CONTEXTE. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. DÉFINITIONS. Une application $N : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une *norme* sur E si elle possède les propriétés suivantes :
(séparation) $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0_E$;
(homogénéité positive)
 $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$;
(inégalité triangulaire)
 $\forall (x, y) \in E^2, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
Le couple (E, N) est un *espace vectoriel normé*.
3. NOTATION. Souvent, on note la norme $\|\cdot\|_E$ (ou $\|\cdot\|$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), et l'espace vectoriel normé E au lieu de $(E, \|\cdot\|)$.
4. THÉORÈME : SECONDE INÉGALITÉ TRIANGULAIRE.
 $\forall (x, y) \in E^2, \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|$.
5. DÉFINITIONS. Dans l'espace vectoriel normé E , le réel $d(x, y) = \|y - x\|$ est la *distance* entre les vecteurs x et y de E . La fonction
 $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+, (x, y) \mapsto d(x, y)$
est la *distance associée* à la norme.

Éléments de topologie

6. CONTEXTE. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et A une partie quelconque de E .

BOULES

7. DÉFINITIONS. Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}_+$.
Si $r > 0$, la *boule ouverte* de centre a et de rayon r est
 $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$.
La *boule fermée* de centre a et de rayon r est
 $BF(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$.
La *sphère* de centre a et de rayon r est
 $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$.
8. REMARQUE. Si E est un plan vectoriel, on parle plutôt de *disque* et de *cercle*.

OUVERTS

9. DÉFINITION. Un point $a \in A$ est *intérieur* à A s'il existe une boule ouverte centrée en a incluse dans A :
 $\exists r > 0, B(a, r) \subset A$.
10. DÉFINITION. A est une *partie ouverte* ou un *ouvert* de E si tous ses points lui sont intérieurs :
 $\forall a \in A, \exists r > 0, B(a, r) \subset A$.
11. THÉORÈME. Une boule ouverte est un ouvert.
12. THÉORÈME. Toute réunion et toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

FERMÉS

13. DÉFINITIONS. Un point $a \in E$ est *adhérent* à A si toute boule ouverte centrée en a rencontre A :
 $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$.
L'ensemble de ces points est l'*adhérence* de A :
 $\text{Adh}(A) = \{x \in E \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$.
14. DÉFINITION. A est une *partie fermée* ou un *fermé* de E si elle est égale à son adhérence : $A = \text{Adh}(A)$.
15. DÉFINITION. A est une *partie dense* de E ou est *dense* dans E si E est l'adhérence de A : $E = \text{Adh}(A)$.
16. THÉORÈME. Une boule fermée est un fermé.
17. THÉORÈME. A est un fermé si et seulement si son complémentaire $E \setminus A$ est un ouvert.
18. THÉORÈME. Toute intersection et toute réunion finie de fermés est un fermé.

BORNÉS

19. DÉFINITION. A est une *partie bornée* ou un *borné* de E si
 $\exists M \geq 0, \forall x \in A, \|x\| \leq M$.
20. THÉORÈME. Une boule est un borné.
21. THÉORÈME. Il est équivalent de dire :
 - A est borné ;
 - $\exists M \geq 0, \forall (x, y) \in A^2, \|x - y\| \leq M$;
 - A est incluse dans une boule de E .
22. DÉFINITION. Soit X un ensemble. Une application $f : X \rightarrow E$ est *bornée* si l'ensemble $f(X)$ l'est :
 $\exists M \geq 0, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M$.

CONVEXES

23. DÉFINITION. A est une *partie convexe* ou un *convexe* de E si
 $\forall (x, y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], (1 - t)x + ty \in A$.
24. THÉORÈME. Une boule est un convexe.

NORMES ÉQUIVALENTES

25. DÉFINITION. Deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* si
 $\exists (\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \forall x \in E, \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$.
26. THÉORÈME. Si E est de dimension finie, toutes les normes sur E sont équivalentes.
27. THÉORÈME. Les éléments topologiques associés à deux normes équivalentes sont les mêmes.

Suites

28. CONTEXTE. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

29. DÉFINITIONS. Une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de E est *convergente* ou *converge* dans E si

$$\exists \ell \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \\ k \geq K \implies \|x_k - \ell\| \leq \varepsilon.$$

Alors le vecteur ℓ est unique et s'appelle la *limite* de la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Une suite qui ne converge pas est une suite *divergente* ou qui *diverge*.

30. THÉORÈME. Toute suite convergente est bornée.

31. THÉORÈME. Étant donnée une suite convergente $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$, de limite ℓ , toute suite extraite de $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, vers ℓ .

32. THÉORÈME. Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de limites ℓ et ℓ' et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La suite $(x_k + x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell + \ell'$ et la suite $(\lambda x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda \ell$.

33. THÉORÈME : CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE L'ADHÉRENCE. Soient $A \subset E$ et $a \in E$: $a \in \text{Adh}(A)$ si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a .

34. COROLLAIRE : CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DES FERMÉS. Une partie A de E est fermée si et seulement si, pour toute suite d'éléments de A , si la suite converge vers un vecteur $\ell \in E$, alors $\ell \in A$.

35. THÉORÈME. Si E est de dimension finie, la convergence des suites ne dépend pas de la norme choisie. En particulier, si $\mathcal{B}$ est une base de E , une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans E si et seulement si les suites numériques des coordonnées des x_k dans $\mathcal{B}$ convergent.

Limite en un point

36. CONTEXTE. Soient deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$, un point $a \in \text{Adh}(A)$ et une fonction $f : A \rightarrow F$.

37. DÉFINITIONS. La fonction f *admet une limite* en a , ou *converge en* a si

$$\exists \ell \in F, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, \\ \|x - a\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Alors le vecteur ℓ est unique et s'appelle la *limite* de la fonction f en a . On dit que f *converge*, ou *tend*, vers ℓ en a .

Si la fonction f ne converge pas, elle *diverge*.

38. THÉORÈME : CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE DE LA LIMITE. La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers a , la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ .

39. THÉORÈME. Supposons que f tende vers ℓ en a . Soient une seconde fonction $g : A \rightarrow F$ qui tende vers ℓ' en a et $\lambda \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + g$ tend vers $\lambda \ell + \ell'$ en a .

40. THÉORÈME. Considérons un troisième espace vectoriel normé $(G, \|\cdot\|_G)$, une partie $B \subset F$ et une fonction $g : B \rightarrow G$. Supposons que $f(A) \subset B$, que f tende vers ℓ en a , que $\ell \in \text{Adh}(B)$ et que g tende vers ℓ' en ℓ . Alors $g \circ f : A \rightarrow G$ tend vers ℓ' en a .

41. THÉORÈME. Supposons F de dimension finie p et soit $\mathcal{C}$ une base de F . La fonction f tend vers ℓ en a si et seulement si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la fonction $f_i : A \rightarrow \mathbb{K}$, qui à tout x de A associe la i^{e} coordonnée de $f(x)$ dans $\mathcal{C}$, tend vers la i^{e} coordonnée de ℓ dans $\mathcal{C}$.

Continuité

42. CONTEXTE. Soient toujours deux espaces vectoriels normés $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, une partie $A \subset E$ et une fonction $f : A \rightarrow F$.

43. DÉFINITIONS. Soit $a \in A$. La fonction f est *continue* en a si elle converge vers $f(a)$ en a .

La fonction f est *continue sur* A si elle est continue en tout point de A .

44. THÉORÈME. Soient une seconde fonction $g : A \rightarrow F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $a \in A$. Si f et g sont continues en a , respectivement sur A , alors $\lambda f + g$ l'est aussi.

45. DÉFINITION. La fonction f est *lipschitzienne sur* A si

$$\exists k \in \mathbb{R}_+, \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

46. THÉORÈME. Si f est lipschitzienne sur A , elle est continue sur A . La réciproque est fautive.

47. THÉORÈME. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ est continue sur E .

48. THÉORÈME. Supposons que E soit de dimension finie, que $F = \mathbb{R}$, que A soit fermée et bornée et que f soit continue sur A . Alors f est bornée sur A et atteint ses bornes.

49. THÉORÈME. Supposons que f soit continue sur E . Alors l'image réciproque par f de tout ouvert, respectivement fermé, de F est un ouvert, respectivement fermé, de E . En particulier, si $F = \mathbb{R}$, alors

- $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est ouvert ;
- $\{x \in E \mid f(x) \geq 0\}$ et $\{x \in E \mid f(x) = 0\}$ sont fermés.

50. THÉORÈME. Si n est un entier naturel non nul, toute fonction polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ est continue.