

Éléments propres

D'un endomorphisme

1. CONTEXTE. Considérons un \mathbb{K} -espace vectoriel E et un endomorphisme u de E .

VALEURS PROPRES

2. THÉORÈME. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Il est équivalent de dire :

- $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$;
- $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas injectif;
- $\exists x \in E \setminus \{0_E\}, u(x) = \lambda x$.

Si de plus E est de dimension finie, il est équivalent de dire :

- $\text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \neq \{0_E\}$;
- $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas surjectif;
- $u - \lambda \text{id}_E$ n'est pas bijectif;
- $\text{rg}(u - \lambda \text{id}_E) < \dim(E)$;
- $\det(u - \lambda \text{id}_E) = 0$.

3. DÉFINITIONS. Une *valeur propre* de u est un scalaire qui vérifie l'une de ces conditions équivalentes.

Le *spectre* de u est l'ensemble de ses valeurs propres et se note $\text{Sp}(u)$.

4. THÉORÈME. Pour tous $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(\lambda) \in \text{Sp}(P(u))$.

5. THÉORÈME. Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(u)$ et tout polynôme P annulateur de u , $P(\lambda) = 0$.

VECTEURS PROPRES

6. NOTATION. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E).$$

7. REMARQUE. Ainsi,

$$\lambda \in \text{Sp}(u) \iff E_\lambda(u) \neq \{0_E\}.$$

8. DÉFINITIONS. Si $\lambda \in \text{Sp}(u)$, l'espace $E_\lambda(u)$ s'appelle le *sous-espace propre* de u associé à λ .

De plus, tout vecteur *non nul* de $E_\lambda(u)$ s'appelle un *vecteur propre* de u associé à λ .

9. THÉORÈME. Si λ et μ sont deux valeurs propres *distinctes* de u , alors $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}$.

10. THÉORÈME. La somme des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes, est directe.

11. THÉORÈME. Soit v un endomorphisme de E qui commute avec u . Tout sous-espace propre de u est stable par v , et réciproquement.

D'une matrice carrée

12. CONTEXTE. Considérons un entier $n \geq 1$, une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et posons $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

GÉNÉRALITÉS

13. DÉFINITION. L'endomorphisme de E *canoniquement associé* à la matrice A est l'application

$$a : E \rightarrow E, X \mapsto AX.$$

14. DÉFINITIONS. Le *noyau* de A est l'ensemble

$$\text{Ker } A = \{X \in E \mid AX = 0_E\}.$$

L'*image* de A est l'ensemble

$$\text{Im } A = \{Y \in E \mid \exists X \in E, AX = Y\}.$$

ÉLÉMENTS PROPRES

15. THÉORÈME. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$.

Il est équivalent de dire :

- $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}$;
- $\exists X \in E \setminus \{0_E\}, AX = \lambda X$;
- $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$;
- $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

16. DÉFINITIONS. Une *valeur propre* de A est un scalaire qui vérifie l'une de ces conditions équivalentes.

Le *spectre sur \mathbb{K}* de A est l'ensemble de ses valeurs propres et se note $\text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

17. NOTATION. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Notons

$$E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n).$$

18. REMARQUE. Ainsi,

$$\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff E_\lambda(A) \neq \{0_E\}.$$

19. DÉFINITIONS. Si $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$, l'espace $E_\lambda(A)$ s'appelle le *sous-espace propre* associé à λ .

De plus, tout vecteur colonne *non nul* de $E_\lambda(A)$ s'appelle un *vecteur propre* de A associé à λ .

20. REMARQUE. Grâce aux endomorphismes canoniquement associés, tous les résultats sur les endomorphismes s'étendent aux matrices.