

Endomorphismes d'un espace euclidien

1. CONTEXTE. Considérons

- E , un espace euclidien de dimension n , dont le produit scalaire est noté $(\cdot | \cdot)$ et la norme $\|\cdot\|$;
- $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, une base orthonormée de E ;
- $u \in \mathcal{L}(E)$, un endomorphisme de E ;
- $A = \text{mat}_{\mathcal{B}}(u)$, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

ISOMÉTRIES VECTORIELLES

2. DÉFINITIONS. u est une *isométrie vectorielle* si elle conserve la norme :

$$\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|.$$

Le *groupe orthogonal* de E , noté $O(E)$, est l'ensemble des isométries vectorielles de E .

3. THÉORÈME. $u \in O(E)$ si et seulement s'il conserve le produit scalaire :

$$\forall(x, y) \in E^2, (u(x) | u(y)) = (x | y).$$

4. THÉORÈME. $u \in O(E)$ si et seulement s'il envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

5. THÉORÈME. Si $u \in O(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u .

6. THÉORÈME. $u \in O(E) \iff A^\top A = I_n$.

7. THÉORÈME. $O(E)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}(E), \circ)$.
On parle donc aussi d'*automorphisme orthogonal*.

MATRICES ORTHOGONALES

8. DÉFINITIONS. A est *orthogonale* si $A^\top A = I_n$.

Le *groupe orthogonal* d'ordre n , noté $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, est l'ensemble des matrices orthogonales.

9. THÉORÈME. $A \in O(n)$ si et seulement si ses colonnes, ou ses lignes, forment une base orthonormée.

10. THÉORÈME. $A \in O(n) \implies \det(A) = \pm 1$.
La réciproque est fausse.

11. DÉFINITION. Le *groupe spécial orthogonal* d'ordre n , noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$, est l'ensemble

$$SO(n) = \{M \in O(n) \mid \det(M) = 1\}.$$

12. THÉORÈME.

- $O(n)$ est un sous-groupe de $(\text{GL}_n(\mathbb{R}), \cdot)$.
- $SO(n)$ est un sous-groupe de $(O(n), \cdot)$.

ENDOMORPHISMES AUTOADJOINTS

13. DÉFINITIONS. u est *autoadjoint* ou *symétrique* si

$$\forall(x, y) \in E^2, (u(x) | y) = (x | u(y)).$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E se note $\mathcal{S}(E)$.

14. THÉORÈME. $u \in \mathcal{S}(E) \iff A^\top = A$.

15. THÉORÈME SPECTRAL. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u . Autrement dit, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

16. DÉFINITIONS. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, il est *positif* si

$$\forall x \in E, (u(x) | x) \geq 0.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E se note $\mathcal{S}^+(E)$.

17. DÉFINITIONS. Si $u \in \mathcal{S}(E)$, il est *défini positif* si

$$\forall x \in E \setminus \{0\}, (u(x) | x) > 0.$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs de E se note $\mathcal{S}^{++}(E)$.

18. THÉORÈME. Supposons que $u \in \mathcal{S}(E)$.

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{S}^+(E) &\iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+, \\ u \in \mathcal{S}^{++}(E) &\iff \text{Sp}(u) \subset \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$

MATRICES SYMÉTRIQUES RÉELLES

19. DÉFINITIONS. A est *symétrique* si $A^\top = A$.

L'ensemble des matrices symétriques se note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

20. THÉORÈME. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale : il existe deux matrices $\Omega \in O(n)$ et D diagonale telles que $A = \Omega D \Omega^\top$.

21. DÉFINITIONS. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, elle est *positive* si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^\top A X \geq 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques positives se note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

22. DÉFINITIONS. Si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, elle est *définie positive* si

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^\top A X > 0.$$

L'ensemble des matrices symétriques définies positives se note $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

23. THÉORÈME. Supposons que $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) &\iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+, \\ A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) &\iff \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*. \end{aligned}$$