

# Espaces probabilisés

## Ensembles dénombrables

1. DÉFINITIONS. Un ensemble  $E$  est *dénombrable*, respectivement *au plus dénombrable*, s'il est en bijection avec  $\mathbb{N}$ , respectivement avec une partie de  $\mathbb{N}$ .

On peut alors décrire  $E$  sous la forme

$$E = \{x_i, i \in I\},$$

où  $I = \mathbb{N}$ , respectivement  $I \subset \mathbb{N}$ .

2. EXEMPLES.  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}^2$  et  $\mathbb{Q}$  sont dénombrables.  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{C}$  ne le sont pas.

3. DÉFINITIONS. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de parties d'un ensemble  $E$ .

La *réunion* des  $A_n$  est l'ensemble

$$\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}.$$

Si l'on suppose que les  $A_n$  sont deux à deux disjoints, on parle de *réunion disjointe*, et on la note

$$\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n.$$

L'*intersection* des  $A_n$  est l'ensemble

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, x \in A_n\}.$$

## Familles sommables

4. CONTEXTE. Soit  $I$  un ensemble au plus dénombrable, dont les éléments s'appellent des *indices*.

5. DÉFINITION. Dans un ensemble  $E$ , une *famille indéxée par  $I$*  est une fonction

$$\left| \begin{array}{ll} I & \longrightarrow E \\ i & \longmapsto x_i, \end{array} \right.$$

notée  $(x_i)_{i \in I}$ .

6. DÉFINITION. À une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de  $[0, +\infty]$ , on sait associer sa *somme*,

$$\sum_{i \in I} x_i \in [0, +\infty].$$

7. DÉFINITIONS.

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de  $[0, +\infty]$  est *sommable* si sa somme est finie :

$$\sum_{i \in I} x_i < \infty.$$

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{C}$  est *sommable* si la famille  $(|x_i|)_{i \in I}$  l'est.

8. THÉORÈME : SOMMATION PAR PAQUETS. Étant donné un découpage de  $I$  en paquets, sous la forme

$$I = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} I_n,$$

et une famille sommable  $(x_i)_{i \in I}$  de  $\mathbb{C}$ , on peut sommer par paquets, c'est-à-dire

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \sum_{i \in I_n} x_i \right).$$

9. THÉORÈME DE FUBINI. Considérons un second ensemble d'indices  $J$  au plus dénombrable.

Une famille  $(x_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$  de  $\mathbb{C}$  est sommable si et seulement si

- pour tout  $i \in I$ , la famille  $(x_{i,j})_{j \in J}$  est sommable,
- la famille  $(\sum_{j \in J} |x_{i,j}|)_{i \in I}$  est sommable.

Dans ce cas,

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} x_{i,j} = \sum_{i \in I} \left( \sum_{j \in J} x_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left( \sum_{i \in I} x_{i,j} \right).$$

## Espaces probabilisables

10. CONTEXTE. Soit un ensemble  $\Omega$  quelconque, appelé *univers*.

11. DÉFINITIONS. Une *tribu sur  $\Omega$*  est un ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  tel que

- $\Omega \in \mathcal{A}$  ;
- $\forall A \in \mathcal{A}, \bar{A} \in \mathcal{A}$  ;
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .

Le couple  $(\Omega, \mathcal{A})$  est un *espace probabilisable*.

12. CONTEXTE. Soit une tribu  $\mathcal{A}$  sur  $\Omega$ .

13. PROPRIÉTÉS.

- $\emptyset \in \mathcal{A}$  ;
- $\forall (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$ .
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall (A_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathcal{A}^{n+1}$ ,

$$\bigcap_{k=0}^n A_k \in \mathcal{A} \text{ et } \bigcup_{k=0}^n A_k \in \mathcal{A}.$$

14. DÉFINITIONS. Un élément  $A \in \mathcal{A}$  est un *évènement*. Un singleton de  $\mathcal{A}$  est un *évènement élémentaire*. Deux évènements  $A$  et  $B$  sont *incompatibles* si  $A \cap B = \emptyset$ .

15. DÉFINITIONS. Une suite d'évènements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est *croissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_n \subset A_{n+1},$$

et *décroissante* si

$$\forall n \in \mathbb{N}, A_{n+1} \subset A_n.$$

16. DÉFINITION. Une suite d'évènements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un *système complet d'évènements* si

- $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$  ;
- $\Omega = \bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ .

## Espaces probabilisés

17. CONTEXTE. Soit  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espace probabilisable.

18. DÉFINITIONS. Une *probabilité* sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une fonction

$$P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad A \mapsto P(A),$$

notée aussi  $\mathbf{P}$  ou  $\mathbb{P}$ , telle que

- $P(\Omega) = 1$  ;
- pour tout suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'évènements incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Le triplet  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  est un *espace probabilisé*.

19. CONTEXTE. Soit une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

20. DÉFINITIONS. Soit un évènement  $A \in \mathcal{A}$ .

- $A$  est *presque sûr* si  $P(A) = 1$ .
- $A$  est *négligeable* si  $P(A) = 0$ .

21. PROPRIÉTÉS.

- $P(\emptyset) = 0$  ;
- $\forall A \in \mathcal{A}, P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  ;
- $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$ ,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B);$$

$$A \subset B \implies P(A) \leq P(B).$$

22. THÉORÈME. Pour tout système complet d'évènements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

23. DÉFINITION. Un *système quasi-complet d'évènements* est une suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'évènements incompatibles tels que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1.$$

24. THÉORÈME : CONTINUITÉ CROISSANTE. Pour toute suite croissante d'évènements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

25. THÉORÈME : CONTINUITÉ DÉCROISSANTE. Pour toute suite décroissante d'évènements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

26. THÉORÈME : SOUS-ADDITIVITÉ. Pour toute suite d'évènements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

## Conditionnement

27. CONTEXTE. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

28. DÉFINITION. Soit  $A$  un évènement tel que  $P(A) \neq 0$ . Pour tout évènement  $B$ , on appelle *probabilité (conditionnelle) de  $B$  sachant  $A$*  le nombre

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

29. THÉORÈME. Soit  $A$  un évènement tel que  $P(A) \neq 0$ . L'application

$$P_A : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1], \quad B \mapsto P(B|A)$$

est une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$ , appelée *probabilité (conditionnelle) sachant  $A$* .

30. THÉORÈME : FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES. Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet d'évènements. Alors, pour tout évènement  $B$ ,

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n) P(A_n),$$

en convenant que  $P(B|A_n) P(A_n) = 0$  si  $P(A_n) = 0$ .

31. THÉORÈME : FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{A}^n$ ,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n A_k\right) = \prod_{k=1}^n P\left(A_k \mid \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right)$$

$$= P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots$$

$$\times P(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

32. THÉORÈME : FORMULE DE BAYES. Soient  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un système complet d'évènements, et un évènement  $B$  tel que  $P(B) \neq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P(A_n|B) = \frac{P(B|A_n) P(A_n)}{\sum_{k=0}^{+\infty} P(B|A_k) P(A_k)}.$$

## Indépendance

33. CONTEXTE. Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espace probabilisé.

34. DÉFINITION. Deux évènements  $A$  et  $B$  sont *indépendants* si

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

35. THÉORÈME. Si  $P(A) \neq 0$ , les évènements  $A$  et  $B$  sont indépendants si et seulement si  $P(B|A) = P(B)$ .

36. DÉFINITIONS. Soient  $I$  un ensemble d'indices au plus dénombrable et  $(A_i)_{i \in I}$  une suite d'évènements.

Les  $A_i$  sont *indépendants deux à deux* si pour tout  $(i, j) \in I^2$  tel que  $i \neq j$ ,  $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$ .

Les  $A_i$  sont *mutuellement indépendants* si pour tout sous-ensemble fini  $J \subset I$ ,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

37. THÉORÈME. Si les  $A_i$  sont mutuellement indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux. La réciproque est fautive.