

Géométrie différentielle

Courbes implicites planes

1. CONTEXTE. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel.

2. DÉFINITION. Une *courbe définie implicitement* ou *courbe implicite*, est un ensemble

$$C = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

3. CONTEXTE. Soit une courbe implicite C .

4. DÉFINITION. Un point $M_0 = (x_0, y_0)$ de C est *régulier* sur C si $df(M_0) \neq 0$, et il est *singulier* ou *critique* sinon.

5. CONTEXTE. Soit un point régulier $M_0 \in C$.

6. DÉFINITION. La *tangente* à C en M_0 est la droite affine $TC_{M_0} = M_0 + \text{Ker}(df(M_0))$.

7. THÉORÈME. Le gradient $\nabla f(M_0)$ est orthogonal à TC_{M_0} et une équation cartésienne de TC_{M_0} est

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Surfaces implicites

8. CONTEXTE. Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté usuel.

9. DÉFINITION. Une *surface définie implicitement* ou *surface implicite*, est un ensemble

$$S = \{(x, y, z) \in U \mid f(x, y, z) = 0\}$$

où U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

10. CONTEXTE. Soit une surface implicite S .

11. DÉFINITION. Un point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de S est *régulier* sur S si $df(M_0) \neq 0$, et il est *singulier* ou *critique* sinon.

12. CONTEXTE. Soit un point régulier $M_0 \in S$.

13. DÉFINITION. Le *plan tangent* à S en M_0 est le plan affine $TS_{M_0} = M_0 + \text{Ker}(df(M_0))$.

14. THÉORÈME. Le gradient $\nabla f(M_0)$ est orthogonal à TS_{M_0} et une équation cartésienne de TS_{M_0} est

$$(x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0) \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

15. THÉORÈME. Considérons deux surfaces S_1 et S_2 , une courbe $C = S_1 \cap S_2$ et un point $M_0 \in C$. Si les plans tangents TS_1 et TS_2 en M_0 à S_1 et S_2 ne sont pas confondus, la droite $TS_1 \cap TS_2$ est la tangente en M_0 à C .