Intégrabilité

1. Contexte. Considérons un intervalle réel I d'extrémités a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a < b$, et deux fonctions f et g continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$.

Définitions

2. Définitions. L'intégrale de f sur I *converge absolument* si $\int_I |f|$ converge.

La fonction f est *intégrable sur I* si elle est continue par morceaux sur I et si son intégrale sur I converge absolument.

3. Définition. L'intégrale sur I de f est *semi-convergente* si elle converge mais pas absolument.

4. Exemple. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est semi-convergente.

Théorèmes

5. Théorème. La fonction f est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a, b[$.

6. Comparaisons. Ici, $I = [a, b[$.

— Si $|f| \leqslant |g|$ ou $f = \mathrm{O}_b(g)$ ou $f = \mathrm{o}_b(g)$, l'intégrabilité de g sur I entraine celle de f.

— Si $f \sim_b g$, f et g sont simultanément intégrables sur I.

7. Remarque. Si $I =]a, b]$, on compare f et g en a. Et si $I =]a, b[$, on compare *séparément* f et g en a et b.

8. Théorème. Si f est continue sur $[a, b]$, elle est intégrable sur $]a, b]$, $[a, b[$ et $]a, b[$.

9. Théorème. Si l'intervalle I est borné et si f est bornée sur I, alors elle y est intégrable.

10. Théorème. Une fonction complexe est intégrable sur I si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

11. Théorème. Si f est intégrable sur I, son intégrale sur I converge et $|\int_I f| \leqslant \int_I |f|$.

12. Théorème. Supposons f positive, continue et intégrable sur I. Si $\int_I f = 0$, alors $f = 0$.

13. Théorème : comparaison série-intégrale.

Supposons f décroissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. La série $\sum f(n)$ converge si et seulement si f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Espace L^1

14. Définition. $L^1(I, \mathbb{K})$ est l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ intégrables sur I.

15. Théorème. $L^1(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel.