Intégrales à paramètre

1. Contexte. Étant donnés deux intervalles réels A et I et une fonction $g : A \times I \to \mathbb{K}$, étudions la fonction

$$f : A \to \mathbb{K},\ x \mapsto \int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Définition. La fonction g vérifie l'*hypothèse de domination* s'il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ |g(x,t)| \leqslant \varphi(t).$$

3. Théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Soit a une extrémité de A, éventuellement infinie.

Supposons que
- ◦ pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ◦ pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ admet une limite finie $\ell(t)$ en a ;
- ◦ $\ell : t \mapsto \ell(t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ◦ g vérifie l'hypothèse de domination.

Alors
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I ;
- ℓ est intégrable sur I ;
- $\displaystyle\lim_{x \to a} \int_I g(x,t)\,\mathrm{d}t = \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

4. Théorème : continuité.

Supposons que
- ◦ pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur A ;
- ◦ pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ◦ g vérifie l'hypothèse de domination.

Alors
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est définie et continue sur A.

5. Théorème : classe $\mathscr{C}^1$ (dérivation sous le signe $\int$ ou formule de Leibniz).

Supposons que
- ◦ pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- ◦ pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I ;
- ◦ pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ◦ $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination.

Alors
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- $\displaystyle\forall x \in A,\ f'(x) = \int_I \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

6. Théorème : classe $\mathscr{C}^k$. Soit un entier $k \geqslant 1$.

Supposons que
- ◦ pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A ;
- ◦ pour tout $x \in A$ et tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- ◦ $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- ◦ $\dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}$ vérifie l'hypothèse de domination.

Alors
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k g}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I ;
- f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur A ;
- $\displaystyle\forall p \in [\![1,k]\!], \forall x \in A,\ \ f^{(p)}(x) = \int_I \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t$.