Intégrales généralisées ou impropres

1. Contexte. Considérons un intervalle réel I d'extrémités a et b dans $\overline{\mathbb{R}}$ avec $a<b$, et une fonction f continue par morceaux sur I, à valeurs réelles ou complexes.

Sur un intervalle semi-ouvert

2. Définitions. L'intégrale de f sur $I=[a,b[$ *converge*, ou *est convergente*, si la fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand x tend vers b. Cette limite est l'*intégrale généralisée*, ou *intégrale impropre* de f sur I, notée

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Si cette limite n'existe pas, l'intégrale de f sur I *diverge*, ou *est divergente*.

La *nature* d'une intégrale généralisée est son caractère convergent ou divergent.

3. Remarque. La convergence de l'intégrale de f sur $[a,b[$ entraine la convergence de l'intégrale de f sur $[c,b[$, pour tout $c\in[a,b[$: autrement dit, la nature de l'intégrale de f sur $[a,b[$ dépend *uniquement* du comportement de f au voisinage de b.

4. Définition. De même, on définit l'intégrale généralisée de f sur $I=]a,b]$ par la limite, si elle existe,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Sur un intervalle ouvert

5. Définition. Soit c un élément de $I=]a,b[$. L'intégrale de f sur I *converge* si les *deux* intégrales $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent ; dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

6. Remarque. Cette définition ne dépend pas de c : en effet, pour d et x dans $]a,b[$,

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_d^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t,$$

donc les intégrales $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_d^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ont simultanément une limite quand x tend vers a^+ ou vers b^-.

7. Notation. Si l'intégrale de f sur I converge, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f=\int_I f.$$

8. Théorème. Si f est complexe, son intégrale sur I converge si et seulement si celles de ses parties réelles et imaginaires convergent, et alors

$$\int_I f=\int_I \mathrm{Re}(f)+i\int_I \mathrm{Im}(f).$$

Exemples fondamentaux

9. Contexte. Soit un réel α.

10. Théorème : intégrales de Riemann.

— $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$;

— $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha<1$;

— $\displaystyle\int_a^{b}\frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha<1$.

11. Théorème. $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha>0$.

12. Théorème. $\displaystyle\int_0^1\ln(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Propriétés

13. Contexte. Considérons toujours un intervalle réel I d'extrémités a et b, et des fonctions f et g continues par morceaux sur I à valeurs réelles ou complexes.

14. Théorème : relation de Chasles. Si $\int_a^b f$ converge, alors pour tout $c\in I$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et

$$\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f.$$

15. Théorème : linéarité. Soit λ un scalaire. Si $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I(f+\lambda g)$ converge et

$$\int_I(f+\lambda g)=\int_I f+\lambda\int_I g.$$

16. Théorème : positivité. Si f est réelle positive et que $\int_I f$ converge, alors $\int_I f\geqslant 0$.

17. Théorème : croissance. Si f et g sont réelles, que $f\leqslant g$ sur I et que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors $\int_I f\leqslant\int_I g$.

18. Théorème : changement de variable. Soit φ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ d'un intervalle J dans I. Supposons f *continue* sur I. Alors, les intégrales $\int_I f$ et $\int_J f\circ\varphi\cdot|\varphi'|$ ont même nature ; et si elles convergent,

$$\int_I f=\int_J f\circ\varphi\cdot|\varphi'|.$$

19. Définition. Si une fonction F définie sur I admet des limites aux extrémités a et b de I, on pose

$$\big[F\big]_I=\big[F\big]_a^b=\lim_{b^-}F-\lim_{a^+}F.$$

20. Théorème : intégration par parties. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Si deux des trois écritures $\int_I u\,v'$, $\int_I u'\,v$ et $\big[u\,v\big]_I$ ont un sens, alors la troisième a aussi un sens et

$$\int_I u\,v'=\big[u\,v\big]_I-\int_I u'\,v.$$