Rappels sur les déterminants

1. Contexte. n est un entier naturel non nul.

Introduction

2. Définition : déterminant 2×2.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c.$$

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}.$$

3. Théorème : règle de Sarrus.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = a\,e\,i + b\,f\,g + c\,d\,h - c\,e\,g - a\,f\,h - b\,d\,i.$$

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$,

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} \\ &\quad - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33}. \end{aligned}$$

Définitions récursives

4. Contexte. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Définition. Le *mineur* du coefficient a_{ij} est le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en rayant dans la matrice A la ligne i et la colonne j qui se croisent en a_{ij} :

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{ij} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

6. Définition. Le *cofacteur* du coefficient a_{ij} est le nombre

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij}.$$

Autrement dit,

$$\text{cofacteur} = (-1)^{\text{ligne}+\text{colonne}}\,\text{mineur}.$$

7. Remarque. Signes à utiliser pour les cofacteurs :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix}$$

8. Définition : développement selon une colonne.

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}.$$

Définition : développement selon une ligne.

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,A_{ij}.$$

Propriétés

9. Théorème. Pour tous $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(I_n) = 1\,;$$
$$\det(\lambda\,A) = \lambda^n \det(A)\,;$$
$$\det(A\,B) = \det(A)\det(B)\,;$$
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0\,;$$
$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,;$$
$$\det(A^\top) = \det(A).$$

10. Théorème. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Calculs

11. Théorème : opérations élémentaires.

- Si une colonne de $\det(A)$ est nulle, $\det(A) = 0$;
- si deux colonnes de $\det(A)$ sont égales ou proportionnelles, $\det(A) = 0$;
- si l'on permute deux colonnes de $\det(A)$, on change son signe ;
- si l'on voit un facteur commun dans *une* colonne donnée, on peut factoriser $\det(A)$ par ce facteur ;
- on ne change pas $\det(A)$ en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire arbitraire des *autres* colonnes ;
- grâce à l'invariance du déterminant par transposition, toutes ces opérations sont aussi valables sur les lignes de $\det(A)$.

12. Théorème.

- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes de sa diagonale ;
- le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.