Rappels sur les déterminants

P S I · 2 4 2 5 · M A T H S

Contexte. n est un entier naturel non nul.

Introduction

Définition : déterminant 2×2.

Pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = a\,d - b\,c.$$

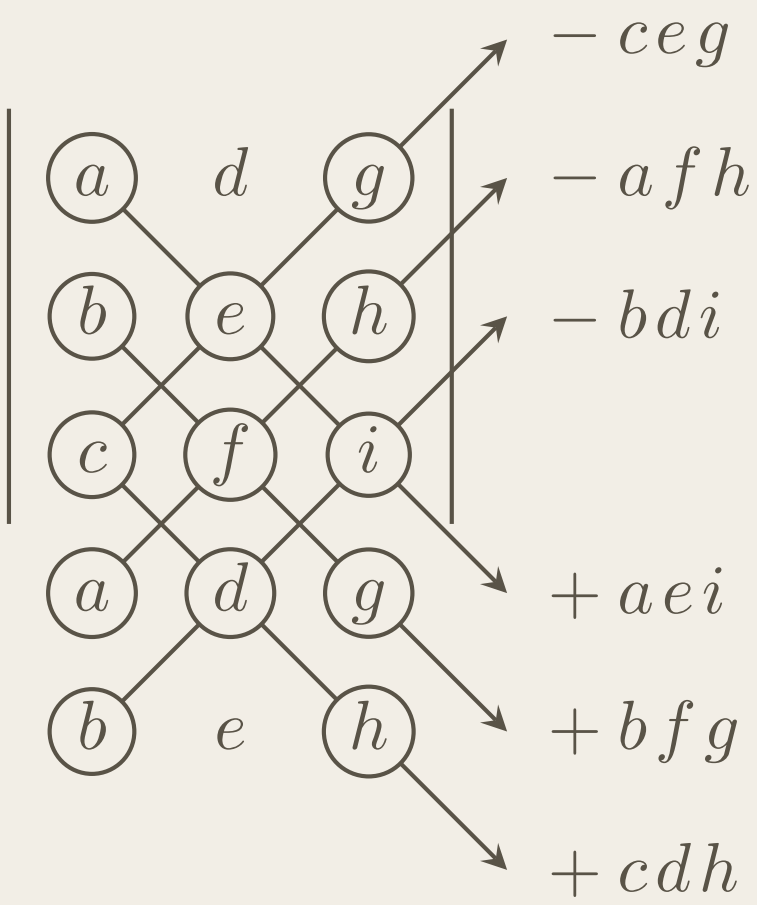
Pour $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}.$$

Théorème : règle de Sarrus.

$$\text{Pour } A = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K}),$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi.$$


a d g
b e h
c f i
a d g
b e h
− ceg
− afh
− bdi
+ aei
+ bfg
+ cdh

Pour $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23}$$

$$- a_{31}\,a_{22}\,a_{13} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33}.$$

Définitions récursives

Contexte. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. Le *mineur* du coefficient a_{ij} est le déterminant Δ_{ij} de la matrice obtenue en rayant dans la matrice A la ligne i et la colonne j qui se croisent en a_{ij} :

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & a_{ij} & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

Définition. Le *cofacteur* du coefficient a_{ij} est le nombre

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}.$$

Autrement dit,

$$\text{cofacteur} = (-1)^{\text{ligne}+\text{colonne}} \text{mineur}.$$

Remarque. Signes à utiliser pour les cofacteurs :

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix}$$

Définition : développement selon une colonne.

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}.$$

Définition : développement selon une ligne.

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, A_{ij}.$$

Propriétés

Théorème. Pour tous $(A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(I_n) = 1\,;$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)\,;$$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)\,;$$

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det(A) \neq 0\,;$$

$$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \Longrightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,;$$

$$\det(A^\top) = \det(A).$$

Théorème. Deux matrices semblables ont même déterminant.

Calculs

Théorème : opérations élémentaires.

— Si une colonne de $\det(A)$ est nulle, $\det(A) = 0$;

— si deux colonnes de $\det(A)$ sont égales ou proportionnelles, $\det(A) = 0$;

— si l'on permute deux colonnes de $\det(A)$, on change son signe ;

— si l'on voit un facteur commun dans *une* colonne donnée, on peut factoriser $\det(A)$ par ce facteur ;

— on ne change pas $\det(A)$ en ajoutant à une colonne une combinaison linéaire arbitraire des *autres* colonnes ;

— grâce à l'invariance du déterminant par transposition, toutes ces opérations sont aussi valables sur les lignes de $\det(A)$.

Théorème.

— Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des termes de sa diagonale ;

— le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

[CCP] Soit $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}.$$

[MT18] Calculer $\det(1+\delta_{ij}\,a_i)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

[MP] Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a^2 & a & & (0) \\ a & 1+a^2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ (0) & & a & 1+a^2 \end{vmatrix}_n .$$