Rappels sur les espaces vectoriels

1. CONTEXTE.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

n est un entier naturel non nul.

Hyperplans

2. CONTEXTE. Considérons un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

3. DÉFINITION. Une *forme linéaire* est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

4. THÉORÈME. Une forme linéaire φ de E est soit nulle, soit surjective.

5. THÉORÈME. Soit H un sous-espace vectoriel de E . Il est équivalent de dire :

(i) $\exists \varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}, H = \text{Ker } \varphi$;

(ii) $\exists e \in E \setminus \{0\}, E = H \oplus \mathbb{K}e$;

(iii) $\forall e \in E \setminus H, E = H \oplus \mathbb{K}e$.

Si de plus E est de dimension finie, il est aussi équivalent de dire :

(iv) $\dim(H) = \dim(E) - 1$.

6. DÉFINITION. Un sous-espace vectoriel de E est un *hyperplan* de E s'il vérifie l'une des propositions équivalentes précédentes.

Déterminant de Vandermonde

7. DÉFINITION. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Le *déterminant de Vandermonde* de $(a_1, \dots, a_n)$ est

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_n.$$

8. THÉORÈME.

$$V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Interpolation de Lagrange

9. CONTEXTE. Considérons $n + 1$ nombres *distincts* $a_0, \dots, a_n$ dans $\mathbb{K}$.

10. THÉORÈME.

— Il existe d'uniques polynômes $L_0, \dots, L_n$ dans $\mathbb{K}_n[X]$ tels que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2, L_i(a_j) = \delta_{ij}.$$

— Ils sont définis par

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

— La famille $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

11. THÉORÈME. Pour tous nombres $b_0, \dots, b_n$ dans $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(a_i) = b_i.$$

Il est donné par

$$P = \sum_{i=0}^n b_i L_i.$$

12. COROLLAIRE. $\sum_{i=0}^n L_i = 1$.