Rappels sur les matrices

P S I · 2 4 2 5 · M A T H S

Contexte.

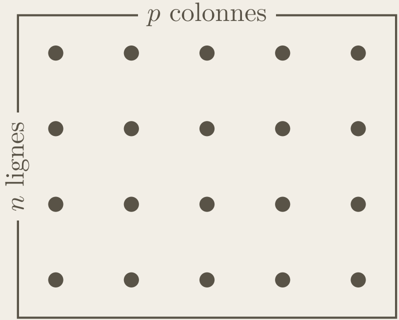
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

n, p, q sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

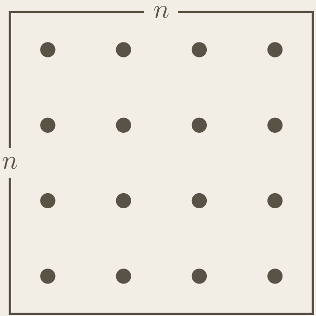
Introduction

Définition. Une *matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$* est un tableau rectangulaire de n lignes et p colonnes, rempli de nombres de $\mathbb{K}$. Leur ensemble se note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

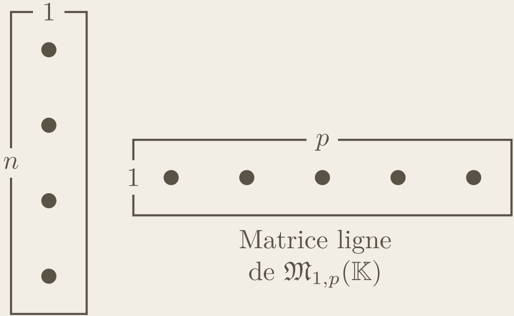
Si $n = p$, on parle de *matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$*. Leur ensemble se note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.



Matrice quelconque



Matrice carrée



Matrice colonne de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Matrice ligne de $\mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$

Notation. Si $M \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit

$$\begin{aligned} M &= (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} \\ &= \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \vdots & m_{ij} & \vdots \\ m_{n1} & \dots & m_{np} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $m_{ij} \in \mathbb{K}$: c'est le coefficient de M situé au croisement de la ligne i et de la colonne j.

Découpages

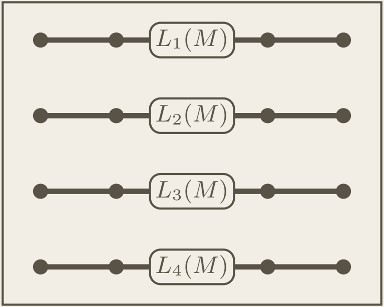
Contexte. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notation. Pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$L_i(M) = \begin{pmatrix} m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{ip} \end{pmatrix}$$

est la ligne i de M, de sorte que l'on peut écrire M comme l'empilement de ses lignes :

$$M = \begin{pmatrix} L_1(M) \\ \vdots \\ L_n(M) \end{pmatrix}.$$



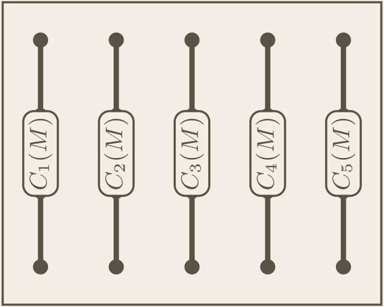
Empilement des lignes

Notation. Pour $j \in [\![1, p]\!]$,

$$C_j(M) = \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{nj} \end{pmatrix}$$

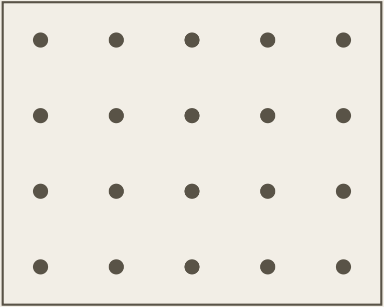
est la colonne j de M, de sorte que l'on peut écrire M comme la juxtaposition de ses colonnes :

$$M = \begin{pmatrix} C_1(M) & \dots & C_p(M) \end{pmatrix}.$$



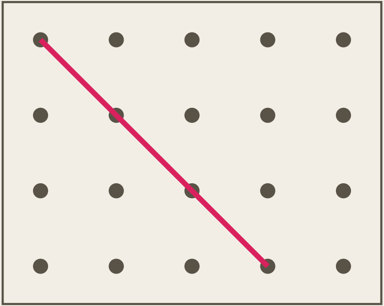
Juxtaposition des colonnes

Remarque. Plus généralement, on peut découper la matrice M par blocs, carrés ou rectangulaires.



Formes particulières

Définition. La *diagonale (principale)* de M est la ligne des coefficients m_{ii} quand i décrit $[\![1, \min(n,p)]\!]$.



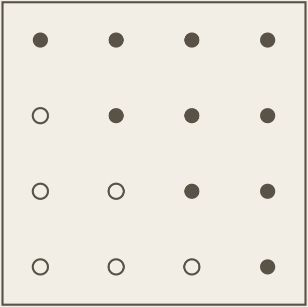
Diagonale

Contexte. Soit une matrice carrée

$$M = (m_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}).$$

Définition. La matrice M est *triangulaire supérieure* si ses coefficients *strictement* en dessous de la diagonale sont nuls :

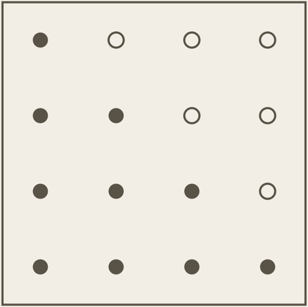
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Longrightarrow m_{ij} = 0.$$



Matrice triangulaire supérieure

Définition. La matrice M est *triangulaire inférieure* si ses coefficients *strictement* au dessus de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i < j \Longrightarrow m_{ij} = 0.$$



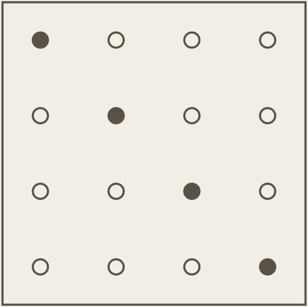
Matrice triangulaire inférieure

Définition. La matrice M est *diagonale* si ses coefficients en dehors de la diagonale sont nuls :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow m_{ij} = 0.$$

Autrement dit, elle est à la fois triangulaire supérieure et inférieure. On la note

$$M = \mathrm{diag}(m_{11}, \dots, m_{nn}).$$

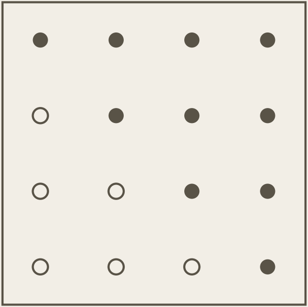


Matrice diagonale

Définition. La matrice M est *triangulaire supérieure par blocs* si l'on peut l'écrire par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_{pp} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux M_{ii} pour $i \in [\![1, p]\!]$ sont carrés, non nécessairement de même taille.

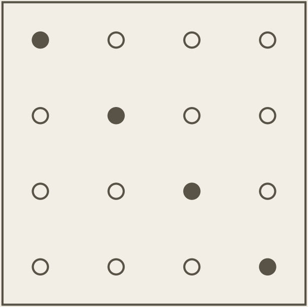


Définition. On définit de même une matrice *triangulaire inférieure par blocs*.

Définition. La matrice M est *diagonale par blocs* si l'on peut l'écrire par blocs sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & M_{pp} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux M_{ii} pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ sont carrés, non nécessairement de même taille.



Opérations

Définition. Soient deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B est la matrice

$$S = A + B = (s_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

de coefficient général

$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

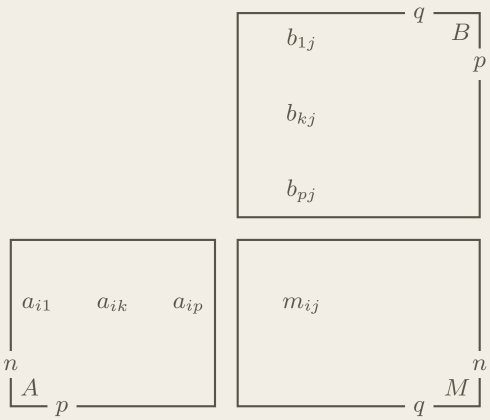
Théorème. Tous les découpages par blocs sont compatibles avec l'addition des matrices.

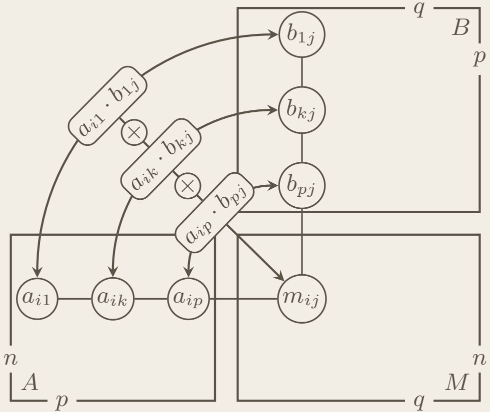
Définition. Soient deux matrices $A = (a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij})$ de $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit de A et B est la matrice

$$M = AB = (m_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

de coefficient général

$$m_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}.$$


q
B
p
b_{1j}
b_{kj}
b_{pj}
a_{i1}
a_{ik}
a_{ip}
n
A
p
m_{ij}
n
M
q



q
B
p
b_{1j}
b_{kj}
b_{pj}
$a_{i1} \cdot b_{1j}$
$\times$
$a_{ik} \cdot b_{kj}$
$\times$
$a_{ip} \cdot b_{pj}$
a_{i1}
a_{ik}
a_{ip}
m_{ij}
n
A
p
n
M
q

Théorème. On voit donc que

— pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$m_{ij} = L_i(A)\,C_j(B)\,;$$

— pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$L_i(M) = L_i(A)\,B\,;$$

— et pour tout $j \in [\![1,q]\!]$,

$$C_j(M) = A\,C_j(B).$$

Théorème. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui se découpe par blocs,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1p} \\ \vdots & A_{ij} & \vdots \\ A_{p1} & \dots & A_{pp} \end{pmatrix},$$

où $p \leqslant n$; les p blocs diagonaux A_{ii} sont carrés, pas forcément tous de même taille ; et les autres blocs A_{ij}, avec $i \neq j$, sont carrés ou rectangulaires.

Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui se découpe par blocs sous la même forme que A :

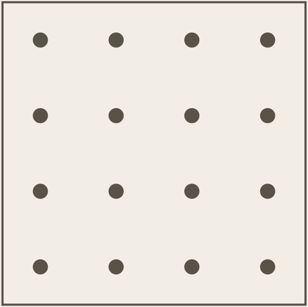
$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & \dots & B_{1p} \\ \vdots & B_{ij} & \vdots \\ B_{p1} & \dots & B_{pp} \end{pmatrix}.$$

Alors le produit $M = AB$ a le même découpage par blocs,

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & \dots & M_{1p} \\ \vdots & M_{ij} & \vdots \\ M_{p1} & \dots & M_{pp} \end{pmatrix},$$

où, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$,

$$M_{ij} = \sum_{k=1}^{p} A_{ik} B_{kj}.$$



Matrices associées

Contexte. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition. Soit un vecteur $x \in E$. Il s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i \, e_i,$$

où $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. La *matrice de x dans la base $\mathscr{B}$* est la matrice colonne

$$X = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Définition. Soit $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ une famille de vecteurs. Pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, on peut écrire

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}\, e_i,$$

où $(x_{1j}, \ldots, x_{nj}) \in \mathbb{K}^n$.

La *matrice de la famille* $(x_1, \ldots, x_p)$ *dans la base* $\mathscr{B}$ est la matrice rectangulaire

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_p) \\ &= \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ \vdots & x_{ij} & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Elle s'obtient en juxtaposant les matrices colonnes de chaque x_j :

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & \ldots & X_p \end{pmatrix}$$

où $X_j = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(x_j)$.

Définition. Soit $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une autre base de E. La *matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$* est la matrice de la base $\mathscr{C}$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}).$$

Elle s'obtient donc en juxtaposant en colonnes les coordonnées des vecteurs de $\mathscr{C}$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$:

$$P = \begin{pmatrix} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_1) & \ldots & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\varepsilon_n) \end{pmatrix}.$$

C'est une matrice inversible :

$$P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Définition. Soit $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme de E. La *matrice de u dans la base $\mathscr{B}$* est la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ des images par u de la base $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned} A &= \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u) \\ &= \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}). \end{aligned}$$

Elle s'obtient en juxtaposant en colonnes les cordonnées des $u(e_j)$ exprimés dans la base $\mathscr{B}$: si $A = (a_{ij})$, a_{ij} est la coordonnée sur e_i de $u(e_j)$.

Manipulations

Contexte. Considérons

- E, un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n ;
- $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, deux bases de E ;
- $u \in \mathfrak{L}(E)$, un endomorphisme de E ;
- $x \in E$, un vecteur de E ;
- $y = u(x)$, son image par u.

Considérons les matrices suivantes :

$$\begin{array}{rclcrcl} P & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) & \text{et} & P^{-1} & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B})\,; \\ A & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) & \text{et} & B & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)\,; \\ X & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) & \text{et} & \varXi & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(x)\,; \\ Y & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(y) & \text{et} & \varUpsilon & = & \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(y). \end{array}$$

Théorème : matrice de l'image d'un vecteur. On a

$$Y = AX,$$

autrement dit,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x).$$

Théorème : changement de base pour un vecteur. On a

$$X = P\,\Xi,$$

autrement dit,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(x),$$

ou encore,

$$\text{ancien} = P \cdot \text{nouveau}.$$

Théorème : changement de base pour un endomorphisme. On a

$$A = P\,B\,P^{-1},$$

autrement dit,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(u)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{B}),$$

ou encore,

$$\text{ancien} = P \cdot \text{nouveau} \cdot P^{-1}.$$

Matrices semblables

Contexte. Soient A et B deux matrices carrées de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. Les matrices A et B sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = P\,B\,P^{-1}.$$

Théorème. Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel où elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Théorème. Si les matrices A et B sont semblables, alors elles ont le même rang. La réciproque est fausse.