Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

1. Contexte. $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Considérons
— $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel ;
— $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée ;
— E un espace vectoriel *de dimension finie* n ;
— $u \in \mathfrak{L}(E)$ un endomorphisme de E.

Polynôme caractéristique

2. Théorème. L'application
$$\mathbb{K} \to \mathbb{K},\ x \mapsto \det(A - x I_n)$$
est polynomiale en x.

3. Définition. Le *polynôme caractéristique de* A est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{K}$ par
$$\chi_A(x) = \det(x I_n - A) = (-1)^n \det(A - x I_n).$$

4. Théorème. Pour tout $x \in \mathbb{K}$,
$$\chi_A(x) = x^n - \operatorname{Tr}(A)\, x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

5. Théorème. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

6. Théorème. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0.$$

7. Définition. Soit $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. La *multiplicité de* λ, notée $m(\lambda)$, est la multiplicité de λ comme racine de χ_A. On l'appelle aussi l'*ordre de* λ, noté $\operatorname{ord}(\lambda)$.

8. Théorème. Si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, alors
$$\operatorname{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} m(\lambda)\, \lambda,$$
$$\det(A) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)} \lambda^{m(\lambda)}.$$

9. Théorème. Pour tout $\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$,
$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(A)) \leqslant m(\lambda).$$

10. Théorème de Cayley-Hamilton. Le polynôme caractéristique de A est annulateur de A, c'est-à-dire que $\chi_A(A) = 0_{\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})}$.

11. Définition. Le *polynôme caractéristique de* u est le polynôme défini pour tout $x \in \mathbb{K}$ par
$$\chi_u(x) = \det(x \operatorname{id}_E - u) = (-1)^n \det(u - x \operatorname{id}_E).$$

12. Remarque. Comme les déterminants de matrices semblables sont égaux, χ_u se calcule avec n'importe quelle matrice de u, et tout le vocabulaire concernant les matrices s'étend aux endomorphismes.

Diagonalisation

13. Définition. u est *diagonalisable* si E est la somme directe des sous-espaces propres de u, c'est-à-dire si
$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} E_\lambda(u).$$

14. Théorème. u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E constituée de vecteurs propres pour u.

15. Théorème. u est diagonalisable si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale.

16. Théorème. u est diagonalisable si et seulement si toute, respectivement n'importe quelle, matrice de u est semblable à une matrice diagonale.

17. Théorème. u est diagonalisable si et seulement si
$$\begin{cases} \chi_u \text{ est scindé sur } \mathbb{K}, \\ \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(u),\ \dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda). \end{cases}$$

18. Théorème. u est diagonalisable si et seulement si
$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)).$$

19. Théorème. u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé sur $\mathbb{K}$ et à racines simples.

20. Corollaire. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, à racines simples, alors u est diagonalisable. La réciproque est fausse.

21. Théorème. u est diagonalisable si et seulement si le polynôme $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)$ est annulateur de u.

22. Définition. A est *diagnonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe deux matrices $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telles que $A = P D P^{-1}$.

23. Remarque. Grâce aux matrices canoniquement associées aux endomorphismes, tous les théorèmes précédents sont valables pour les matrices.

Trigonalisation

24. Définition. A est *trigonalisable* si elle est semblable à une matrice triangulaire, supérieure ou inférieure, c'est-à-dire s'il existe deux matrices $P \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ et T triangulaire telles que $A = P T P^{-1}$.

25. Définition. u est *trigonalisable* s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire, supérieure ou inférieure.

26. Théorème. A, respectivement u, est trigonalisable si et seulement si χ_A, respectivement χ_u, est scindé sur $\mathbb{K}$.