Séries de fonctions

1. Notations.
Comme toujours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.
Étant donnée une fonction $g : I \to \mathbb{K}$ bornée sur I, on note $\|g\|_\infty^I = \sup_I |g|$.

Modes de convergence

2. Contexte. On se donne des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ où $n \in \mathbb{N}$.

3. Définition. Étudier la *série de fonctions* $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ signifie étudier la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où les fonctions $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k$ s'appellent les *sommes partielles*.

Convergence simple

4. Définitions. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge simplement sur I* si pour tout $x \in I$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ converge, autrement dit, si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I.

Dans ce cas, la limite simple de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x),$$

s'appelle la *somme* de la série de fonctions et se note

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n.$$

De plus, pour $n \geqslant 0$, la fonction

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k : x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

s'appelle le *reste d'ordre n* de la série de fonctions.

Convergence uniforme

5. Définition. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge uniformément sur I* si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I.

6. Théorème. Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I, alors elle converge simplement sur I.

7. Théorème. Supposons que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I. Elle converge uniformément sur I si et seulement si la suite des restes $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

Convergence normale

8. Définition. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ *converge normalement sur I* si la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty^I$ converge.

9. Théorème. Si la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I, alors elle converge uniformément sur I.

10. Théorème. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur I si et seulement s'il existe une suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I,\ |f_n(x)| \leqslant \alpha_n$;
ii) la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$ converge ;
iii) α_n ne dépend pas de x.

Permutations de limites

11. Contexte. On se donne des fonctions $f_n : I \to \mathbb{K}$ où $n \in \mathbb{N}$ et l'on étudie la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

12. Théorème de la double limite.
Soit a une extrémité de I, éventuellement infinie.

Supposons que
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I ;
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n admet une limite finie ℓ_n en a.

Alors
- la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \ell_n$ converge ;
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a qui vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$; autrement dit,
$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x).$$

13. Théorème : Continuité.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur I.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

14. Théorème : classe $\mathscr{C}^1$.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I ;
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n'$ converge uniformément sur I.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
- $\displaystyle \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$

15. Théorème : classe $\mathscr{C}^k$.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- ◦ pour tout $p \in [\![0, k-1]\!]$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(p)}$ converge simplement sur I ;
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n^{(k)}$ converge uniformément sur I.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^k$ sur I ;
- $\displaystyle \forall p \in [\![1, k]\!],\ \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)}.$

16. Théorème : intégration sur un segment.
Soient a et b dans I, avec $a < b$.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Alors
- $\displaystyle \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n.$

17. Théorème : intégration sur un intervalle.

Supposons que
- ◦ pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- ◦ $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur I ;
- ◦ la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I ;
- ◦ la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n|$ converge.

Alors
- la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I ;
- $\displaystyle \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n.$