Séries entières

1. Notation. n désigne un entier naturel.

Définition

2. Définition. Étant donnée une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une variable $z \in \mathbb{C}$, on appelle *série entière* la série de fonctions

$$\sum (z \mapsto a_n\, z^n),$$

que l'on notera abusivement

$$\sum a_n\, z^n.$$

3. Remarque. Autrement dit, selon le contexte, la notation $\sum a_n\, z^n$ désignera aussi bien une série numérique qu'une série de fonctions.

Rayon de convergence

Définitions

4. Contexte. Soit une série entière $\sum a_n\, z^n$.

5. Lemme d'Abel. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tel que la suite $(a_n\, z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée, alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n\, z^n$ converge absolument.

6. Théorème. Il existe un unique

$$R \in [0,+\infty] = [0,+\infty[\cup \{+\infty\}$$

tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n\, z^n$

— converge absolument si $|z| < R$;

— diverge grossièrement si $|z| > R$.

7. Définitions. Ce R s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n\, z^n$.

Le disque ouvert $D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ s'appelle le *disque (ouvert) de convergence.*

Le cercle $C(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R\}$ s'appelle le *cercle de convergence*, ou mieux le *cercle d'incertitude.*

8. Contexte. Jusqu'à la fin du paragraphe, considérons deux séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, de rayons de convergence R_a et R_b.

Comparaisons

9. Théorème. Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R_a \geqslant R_b$.

10. Théorème. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

11. Théorème.

S'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $a_n = n^\alpha\, b_n$, alors $R_a = R_b$.

S'il existe une fraction rationnelle non nulle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $a_n = F(n)\, b_n$, alors $R_a = R_b$.

12. Théorème : règle de d'Alembert.

Si $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, et si

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \in [0,+\infty],$$

alors $R_a = \dfrac{1}{\ell} \in [0,+\infty]$.

Opérations

13. Théorème. Soit $\sum c_n\, z^n$ la série entière somme de $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, où $c_n = a_n + b_n$, de rayon de convergence R_c.

Alors $R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\}$, et si $R_a \neq R_b$, $R_c = \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, z^n.$$

14. Définition. On appelle *produit de Cauchy* des séries entières $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, la série entière $\sum c_n\, z^n$ où

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q = \sum_{p=0}^{n} a_p\, b_{n-p} = \sum_{q=0}^{n} a_{n-q}\, b_q.$$

15. Théorème. Soit $\sum c_n\, z^n$ le produit de Cauchy de $\sum a_n\, z^n$ et $\sum b_n\, z^n$, où $c_n = \sum_{p+q=n} a_p\, b_q$, de rayon de convergence R_c.

Alors $R_c \geqslant \min\{R_a, R_b\}$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min\{R_a, R_b\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, z^n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\, z^p \right) \cdot \left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\, z^q \right).$$

Régularité de la somme

16. Contexte. Étant donnée une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une variable $x \in \mathbb{R}$, considérons la série entière $\sum a_n\, x^n$, de rayon de convergence $R > 0$, et étudions sa somme

$$S :]-R, R[\to \mathbb{C},\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n.$$

17. Théorème. La série entière $\sum a_n\, x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

18. Théorème : continuité.

La somme S est continue sur $]-R, R[$.

19. Théorème : primitivation.

La série entière intégrée terme à terme $\sum a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a pour rayon de convergence R.

On peut primitiver S terme à terme : pour tout $x \in]-R, R[$,

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

20. Théorème : classe $\mathscr{C}^1$.

La série entière dérivée terme à terme $\sum_{n \geqslant 1} n\, a_n\, x^{n-1}$ a pour rayon de convergence R.

La fonction S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-R, R[$ et pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n.$$

21. Théorème : classe $\mathscr{C}^\infty$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la série entière dérivée p fois $\sum_{n \geqslant p} n\,(n-1) \cdots (n-p+1)\, a_n\, x^{n-p}$ a pour rayon de convergence R.

La fonction S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-R, R[$,

$$S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n\,(n-1) \cdots (n-p+1)\, a_n\, x^{n-p}.$$

22. Théorème. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!},$$

donc pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

23. Théorème. S admet un développement limité à tout ordre en 0, obtenu en tronquant la somme : pour tout $n \in \mathbb{N}$, au voisinage de 0,

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \mathrm{o}(x^n).$$

Développement en série entière

24. Contexte. On se donne un réel $r > 0$ et une fonction $f :]-r, r[\to \mathbb{C}$.

25. Définition. La fonction f est *développable en série entière (en 0 ou sur $]-r, r[$)* s'il existe une série entière $\sum a_n\, x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in]-r, r[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n.$$

La série entière $\sum a_n\, x^n$ s'appelle le *développement en série entière de f (en 0)*.

26. Théorème. Si f est développable en série entière, elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et son développement en série entière est

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

27. Définition. Si f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$, la série entière

$$\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

s'appelle la *série de Taylor de f en 0*.

28. Théorème. La fonction f est développable en série entière si et seulement si

— f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$;

— la suite $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes

$$R_n : x \mapsto \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

converge simplement sur $]-r, r[$ vers la fonction nulle.

29. Théorème. Si f et une autre fonction $g :]-r, r[\to \mathbb{C}$ sont développables en série entière, alors $f + g$ et $f\,g$ le sont, et leurs développements s'obtiennent respectivement comme somme et produit de Cauchy de ceux de f et g.

30. Théorème. Si f est développable en série entière, alors ses primitives et dérivées de tous ordres le sont, et leurs développements s'obtiennent respectivement comme primitives et dérivées de celui de f.

Fonctions génératrices

31. Contexte. Considérons deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

32. Définition. Quand cela a un sens, la *fonction génératrice de X* est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)\, t^n.$$

33. Théorème. Le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à 1, et G_X est définie au moins sur $[-1, 1]$.

34. Théorème. X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1, et dans ce cas, $E(X) = G'_X(1)$.

35. Théorème. X admet un moment d'ordre 2 si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

36. Théorème. Si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)\, G_Y(t),$$

en notant G_Y et G_{X+Y} les fonctions génératrices de Y et $X + Y$ respectivement.