Suites de fonctions

1. NOTATIONS.

Comme toujours, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I est un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

Étant donnée une fonction $g : I \rightarrow \mathbb{K}$ bornée sur I , on note $\|g\|_\infty^I = \sup_I |g|$.

2. CONTEXTE. On se donne des fonctions $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ où $n \in \mathbb{N}$, et l'on étudie la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Modes de convergence

CONVERGENCE SIMPLE

3. DÉFINITIONS. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I si pour tout $x \in I$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Dans ce cas, la fonction

$$f : I \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

s'appelle la *limite simple* de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que cette suite converge simplement sur I vers f .

CONVERGENCE UNIFORME

4. DÉFINITIONS. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I s'il existe une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty^I = 0.$$

Dans ce cas, la fonction f s'appelle la *limite uniforme* de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On dit que cette suite converge uniformément sur I vers f .

5. THÉORÈME. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I , elle converge simplement sur I .

6. THÉORÈME. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f si et seulement s'il existe une suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tels que

i) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$;

ii) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$;

iii) α_n ne dépend pas de x .

7. THÉORÈME. S'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de I telle que la suite numérique $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0, alors la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers f .

Permutations de limites

8. CONTEXTE. Si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I , nommons f sa limite simple.

9. THÉORÈME : CONTINUITÉ.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur I ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I .

ALORS

- f est continue sur I .

10. THÉORÈME : CLASSE $\mathcal{C}^1$.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I : nommons g sa limite simple.

ALORS

- f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
- $f' = g$.

11. THÉORÈME : CLASSE $\mathcal{C}^k$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $p \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, $(f_n^{(p)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I : nommons g_p sa limite simple (avec $g_0 = f$);
- $(f_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I : nommons g_k sa limite simple.

ALORS

- f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ;
- pour tout $p \in \llbracket 1, k \rrbracket$, $f^{(p)} = g_p$.

12. THÉORÈME : INTÉGRATION SUR UN SEGMENT.

Soient a et b dans I , avec $a < b$.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

ALORS

- $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n$.

13. THÉORÈME DE CONVERGENCE DOMINÉE.

SUPPOSONS QUE

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I ;
- $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I ;
- f est continue par morceaux sur I ;
- hypothèse de domination* : il existe une fonction φ intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x).$$

ALORS

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- f est intégrable sur I ;
- $\int_I f = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n$.