Variables aléatoires discrètes

1. CONTEXTE. Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Définitions

2. DÉFINITION. Une *variable aléatoire* X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application

$$X : \Omega \rightarrow X(\Omega), \omega \mapsto X(\omega)$$

telle que pour tout $B \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Ainsi, $X^{-1}(B)$ est un événement, noté

$$(X \in B) = \{X \in B\} = X^{-1}(B).$$

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}).$$

3. DÉFINITION. X est une *variable aléatoire discrète* si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

4. DÉFINITION. X est une *variable aléatoire réelle* si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$(X \leq x) = X^{-1}([-\infty, x]),$$

$$(X < x) = X^{-1}([-\infty, x[).$$

5. DÉFINITION. X est une *variable aléatoire complexe* si $X(\Omega) \subset \mathbb{C}$.

6. DÉFINITION. Si X est une variable aléatoire discrète et f une application définie sur $X(\Omega)$, $f(X)$ est la variable aléatoire

$$f(X) : \Omega \rightarrow f(X(\Omega)), \omega \mapsto f(X(\omega)).$$

7. CONTEXTE. Désormais, toutes les variables aléatoires rencontrées sont discrètes, réelles ou complexes. En particulier, considérons deux variables aléatoires X et Y .

Loi

8. DÉFINITION. La *loi (de probabilité) de X* est

$$P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \rightarrow [0, 1], B \mapsto P(X^{-1}(B)).$$

Pour tout $B \subset X(\Omega)$, on note

$$P(X \in B) = P_X(B).$$

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note

$$P(X = x) = P_X(\{x\}).$$

9. THÉORÈME. La loi de X est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

10. THÉORÈME. La loi de X est caractérisée par les $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$.

11. NOTATION. Si $P_X = P_Y$, on note $X \sim Y$.

Couples

12. DÉFINITION. L'application

$$\Omega \rightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega), \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète, appelée *couple des variables aléatoires X et Y* et notée (X, Y) .

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on note

$$(X = x, Y = y) = ((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y).$$

13. DÉFINITION. La loi de (X, Y) est la *loi conjointe* du couple. Les lois de X et de Y sont les *lois marginales* du couple.

14. DÉFINITION. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, la *loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$* est définie pour tout $x \in X(\Omega)$ par

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

15. THÉORÈME. Pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x | Y = y) P(Y = y).$$

16. REMARQUE. De même, on définit la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ et on en déduit la loi marginale de Y .

Indépendance

17. DÉFINITION. X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

18. THÉORÈME. $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

19. THÉORÈME. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors pour toutes fonctions f et g , $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

20. DÉFINITIONS. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de variables aléatoires discrètes.

Les X_i sont *indépendantes* si pour tout sous-ensemble fini $J \subset I$ et tout $(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j(\Omega)$,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j).$$

Les X_i sont *identiquement distribuées* si elles ont toutes la même loi.

Si $I = \mathbb{N}$ et que les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, on parle de suite *i.i.d.*

21. LEMME DES COALITIONS. Si des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et toutes fonctions f et g ,

$$f(X_1, \dots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \dots, X_n).$$

Espérance

22. DÉFINITION. Si X est à valeurs dans $[0, +\infty]$, l'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x),$$

en convenant que $x P(X = x) = 0$ si $x = +\infty$ et $P(X = x) = 0$.

23. DÉFINITION. Si X est réelle ou complexe, X est d'espérance finie si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'espérance de X est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

24. DÉFINITION. X est centrée si $E(X) = 0$.

25. THÉORÈME. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

26. THÉORÈME DU TRANSFERT. Pour toute fonction f , $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x) P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas,

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

27. CONTEXTE. Supposons X et Y d'espérance finie.

28. THÉORÈME. XY est d'espérance finie. Si $X \perp Y$, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$.

29. THÉORÈME. L'espérance est linéaire : pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\alpha X + \beta Y$ est d'espérance finie et

$$E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$$

30. THÉORÈME. L'espérance est positive : si X est réelle et positive, alors $E(X) \geq 0$.

31. THÉORÈME. Si X est réelle, positive et centrée, alors $(X = 0)$ est presque sûr.

32. THÉORÈME. L'espérance est croissante : si X et Y sont réelles et que $X \leq Y$, alors $E(X) \leq E(Y)$.

Variance et covariance

33. CONTEXTE. Supposons X et Y réelles telles que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie.

34. THÉORÈME. X, Y, XY et $(X + Y)^2$ sont d'espérance finie.

35. DÉFINITION. La variance de X est

$$V(X) = E((X - E(X))^2).$$

36. DÉFINITION. L'écart type de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

37. DÉFINITION. X est réduite si $V(X) = 1$.

38. DÉFINITION. La covariance du couple (X, Y) est

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

39. THÉORÈME DE KÖNIG-HUYGENS.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2, \\ \text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

40. THÉORÈME. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $(aX + b)^2$ est d'espérance finie et $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

41. THÉORÈME.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

42. THÉORÈME. Si $X \perp Y$, alors $\text{Cov}(X, Y) = 0$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Inégalités

43. INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ.

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha X + \beta Y = 0)$ soit presque sûr.

44. INÉGALITÉ DE MARKOV. Si $X \geq 0$,

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

45. INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

$$\forall b > 0, P(|X - E(X)| \geq b) \leq \frac{V(X)}{b^2}.$$

46. LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d. telle que X_1^2 soit d'espérance finie. Notons $m = E(X_1)$, $\sigma = \sigma(X_1)$ et pour tout $n \geq 1$,

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

En conséquence,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$