# Premier devoir à la maison

[E3A15]

**L'usage de calculatrices est interdit.**

*La question étoilée est réservée aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.*

Dans tout le problème, on note tan la fonction tangente.

Étant donnés un entier naturel $n \geqslant 1$ et une fonction $f$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle ouvert $I$, on note $f^{(n)}$ la dérivée $n$-ième de $f$ sur $I$. La notation $f^{(0)}$ désigne $f$.

## Partie A

**1.** Quelle est la période de la fonction tan ?

**2.** Représenter la fonction tan sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

**3.** Démontrer l'existence d'une suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

— $T_0(X) = X$,

— et pour tout entier naturel $n$, $\tan^{(n)}$, dérivée $n$-ième de la fonction tan, vérifie :

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ \tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)).$$

On explicitera une relation de récurrence vérifiée par les polynômes $T_n$ et $T_{n+1}$.

**4.** Expliciter les polynômes $T_1$, $T_2$, $T_3$.

**5.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que les coefficients du polynôme $T_n$ sont des entiers naturels. Quel est le degré du polynôme $T_n$ ?

**6.** Justifier qu'il existe une unique suite de nombres entiers naturels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 1, \forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,$$

$$\tan(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{t_j}{(2j+1)!} x^{2j+1} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} T_{2n+2}(\tan(t))\,\mathrm{d}t.$$

On citera précisément le théorème utilisé.

## Partie B

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et symétrique par rapport à 0. Soit $f$ une fonction de la variable réelle $x$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $I$. Pour tout entier naturel non nul $n$, on note $f^{(n)}$ sa dérivée $n$-ième et $R_n$ la fonction définie pour $x \in I$ par :

$$R_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

**On suppose que $f$ est impaire et que pour tout entier naturel $n$ non nul et tout nombre réel $x$ dans $I$ tel que $x \geqslant 0$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.**

**7.** Soit $x \in I$. Pour tout entier naturel non nul $n$, justifier l'égalité :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + R_{n+1}(x).$$

**8.** Soit $b \in I$ tel que $b > 0$.

**(a)** Démontrer que la suite $(R_n(b))_{n\geqslant 1}$ est convergente.

**(b)** Soient $x \in [0, b]$ et $n$ un entier naturel non nul.

**i.** Justifier l'égalité :

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tx)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

**ii.** En déduire que :

$$0 \leqslant R_n(x) \leqslant \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(tb)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

**iii.** Démontrer que :

$$R_n(x) \leqslant \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b).$$

**(c)** En déduire que pour tout $x$ dans $]-b, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

On justifiera précisément la convergence de la série.

**9.** La suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant été définie dans la question A6, démontrer que :

$$\forall x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,\ \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

**10.*** Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t_n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \ ?$$

Justifier votre réponse.