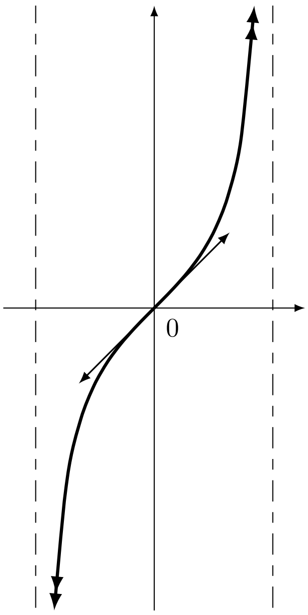
Corrigé du premier devoir à la maison

1. La fonction tan est π-périodique.

2. Sans difficulté,



3. Travaillons sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Clairement, $\tan^{(0)} = \tan = T_0 \circ \tan$.

De même, $\tan' = 1 + \tan^2 = T_1 \circ \tan$, en posant $T_1 = 1 + X^2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. En supposant construit T_n tel que $\tan^{(n)} = T_n \circ \tan$, et puisque T_n et tan sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}\tan^{(n+1)} &= (\tan^{(n)})' = (T_n \circ \tan)' \\ &= \tan' \cdot T_n' \circ \tan = (1 + \tan^2) \cdot T_n' \circ \tan \\ &= ((1 + X^2) \cdot T_n') \circ \tan = T_{n+1} \circ \tan,\end{aligned}$$

en posant $T_{n+1} = (1 + X^2)\, T_n'$.

D'après le principe de récurrence, il existe une unique suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $T_0 = X$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = (1 + X^2)\, T_n'$. Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)} = T_n \circ \tan$.

4. On a déjà rencontré $T_1 = 1 + X^2$.

D'après la relation de récurrence précédente,

$$\begin{aligned}T_2 &= (1 + X^2)\,(1 + X^2)' \\ &= (1 + X^2)\, 2X \\ &= 2X + 2X^3, \\ T_3 &= (1 + X^2)\,(2X + 2X^3)' \\ &= (1 + X^2)\,(2 + 6X^2) \\ &= 2X + 8X^2 + 6X^4.\end{aligned}$$

5. Procédons par récurrence.

Les coefficients de T_0 sont des entiers naturels.

En supposant que, pour $n \in \mathbb{N}$, les coefficients de T_n soient entiers naturels, ceux de T_n' le sont aussi, et puisque $T_{n+1} = (1 + X^2)\, T_n'$, les coefficients de T_{n+1} sont encore entiers naturels.

Sur le même principe, T_0 est de degré 1, et en supposant que, pour $n \in \mathbb{N}$, T_n soit de degré $n + 1$, T_n' est de degré n et $T_{n+1} = (1 + X^2)\, T_n'$ est de degré $n + 2$.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme de degré $n+1$ à coefficients entiers naturels.

6. La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, appliquons-lui la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2n + 1$: pour tout $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\begin{aligned}\tan(x) = &\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{\tan^{(k)}(0)}{k!} \\ &+ \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+1}}{(2n+1)!} \tan^{(2n+2)}(t)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme la fonction tan est impaire, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $\tan^{(2j)}$ l'est aussi et $\tan^{(2j)}(0) = 0$. Alors, en posant pour $j \in [\![0, n]\!]$

$$t_j = \tan^{(2j+1)}(0) = T_{2j+1}(0)$$

et compte tenu que $\tan^{(2n+2)} = T_{2n+2} \circ \tan$, on obtient la formule demandée. Et par unicité du développement limité de tan en 0, les t_j sont uniques.

7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in I$. Comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, $f^{(n)}$ y est de classe $\mathscr{C}^1$; et bien-sûr, $t \mapsto (x-t)^{n-1}$ l'est aussi. Alors, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}&\int_0^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^{n-1}\, \mathrm{d}t \\ &= \left[-f^{(n)}(t)\, \frac{(x-t)^n}{n}\right]_0^x + \int_0^x f^{(n)}(t)\, \frac{(x-t)^n}{n}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{f^{(n)}(0)}{n}\, x^n + \frac{1}{n} \int_0^x f^{(n)}(t)\,(x-t)^n\, \mathrm{d}t,\end{aligned}$$

d'où l'on tire que

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + R_{n+1}(x).$$

8.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, pour tout $t \in [0, b]$, $f^{(n)}(t) \geqslant 0$, donc $f^{(n)}(t)\,(b-t)^{n-1} \geqslant 0$ et $R_n(b) \geqslant 0$. De plus,

$$R_n(b) - R_{n+1}(b) = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, b^n \geqslant 0,$$

donc la suite $(R_n(b))_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 : elle converge.

8.b.i. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, b]$.

Si $x = 0$, on a bien

$$R_n(0) = 0 = \frac{0^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(0t)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Si $x > 0$, l'application $t \mapsto xt$ est bijective et de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,1]$ dans $[0,x]$, donc c'est un changement de variable licite : alors,

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(xt)\,(x-xt)^{n-1}\,x\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(xt)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

8.b.ii. Puisque $f^{(n+1)} \geqslant 0$ sur $[0, b]$, $f^{(n)}$ y croît, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $f^{(n)}(xt) \leqslant f^{(n)}(bt)$ puisque $x \leqslant b$. D'où l'encadrement voulu.

8.b.iii. Ainsi,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant R_n(x) &\leqslant \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(bt)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x}{b}\right)^n \frac{b^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(bt)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \left(\frac{x}{b}\right)^n R_n(b). \end{aligned}$$

8.c. Soit $x \in [0, b[$. Comme la suite $(R_n(b))_{n\geqslant 1}$ décroit, pour tout $n \geqslant 1$, $R_n(b) \leqslant R_1(b)$ donc $R_n(x) \leqslant (\frac{x}{b})^n R_1(b)$. Comme $0 \leqslant x < b$, $0 \leqslant \frac{x}{b} < 1$ donc la suite $((\frac{x}{b})^n R_1(b))_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, donc aussi la suite $(R_n(x))_{n\geqslant 1}$.

Soit maintenant $x \in]-b, 0[$. Le changement de variable du 8.b.i est encore valable : on a donc encore

$$R_n(x) = \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(xt)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

Par hypothèse, f est impaire, donc ses dérives sont soit paires soit impaires et comme elles sont positives sur $[0, b]$, elles gardent un signe constant sur $]-b, 0[$ donc

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{|x|^n}{(n-1)!} \left| \int_0^1 f^{(n)}(xt)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \right| \\ &= \frac{|x|^n}{(n-1)!} \int_0^1 |f^{(n)}(xt)|\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

En outre, par parité, $|f^{(n)}(xt)| = f^{(n)}(|x|t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{|x|^n}{(n-1)!} \int_0^1 f^{(n)}(|x|t)\,(1-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= R_n(|x|). \end{aligned}$$

Comme $|x| \in [0, b[$, d'après ce qui précède la suite $(R_n(|x|))_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, donc aussi la suite $(R_n(x))_{n\geqslant 1}$.

Voici deux versions de la fin de la question.

Version 3/2. D'après la formule de Taylor avec reste intégrale, valide car f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I, pour tout $x \in]-b, b[$ et tout $n \geqslant 1$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + R_n(x).$$

En particulier,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = f(x) - R_n(x).$$

Comme la suite numérique $(R_n(x))_{n\geqslant 1}$ tend vers 0, cette expression a une limite :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = f(x).$$

Cela signifie d'une part que la série

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

converge, et d'autre part que sa somme vaut $f(x)$.

Ainsi, pour tout $x \in]-b, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

Version 5/2. On vient de prouver que la suite des restes (comme suite de fonctions) de la formule de Taylor avec reste intégral converge simplement vers la fonction nulle sur $]-b, b[$. D'après le cours, cela entraine que la fonction f est développable en série entière sur $]-b, b[$.

Autrement dit, pour tout $x \in]-b, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

La convergence de cette série entière est simple (comme série de fonction) et absolue (comme série numérique).

9. Appliquons la question précédente à la fonction tan : choisissons $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; la fonction tan est bien impaire ; pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan^{(n)}(x) = T_n(\tan(x)) \geqslant 0$ car $\tan(x) \geqslant 0$ et T_n est à coefficients entiers naturels donc positifs ou nuls. Il s'ensuit que la question précédente s'applique pour tout $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$, donc l'expression est valide sur I tout entier. Par construction des t_j à la question 6,

$$\forall x \in]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[,\ \tan(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{t_j}{(2j+1)!}\,x^{2j+1}.$$

10.* Puisque cette égalité est au moins vraie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, le rayon de convergence R est au moins égal à $\frac{\pi}{2}$. Par l'absurde, supposons que $R > \frac{\pi}{2}$. Alors, la somme de la série entière serait continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; en particulier, elle aurait une limite finie à gauche en $\frac{\pi}{2}$. Or, elle coïncide avec la fonction tan sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, laquelle tend vers $+\infty$ en $\frac{\pi}{2}$ à gauche. Cela constitue une contradiction.

Alors, $R = \frac{\pi}{2}$.