# Dixième devoir à la maison

## Suites de Lucas

[MP15]
Durée 3h
**L'usage d'ordinateur ou de calculatrices est interdit.**

## Résultats admis

Dans tout ce qui suit, $\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbf{R}, \lambda^2 + \lambda - 1 \neq 0\}$ et l'on suppose que $\lambda$ appartient à $\mathcal{C}$. Pour simplifier la rédaction, le candidat pourra utiliser la notation

$$\tilde{\lambda} = \lambda^2 + \lambda - 1.$$

Les suites de Fibonacci $(F_n,\ n \in \mathbf{Z})$ et de Lucas $(L_n,\ n \in \mathbf{Z})$ généralisées sont définies respectivement par

$$\begin{aligned} &F_0(\lambda) = 0,\ F_1(\lambda) = 1, \\ &F_{n+1}(\lambda) = (1 + 2\lambda)\, F_n(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\, F_{n-1}(\lambda), \quad \text{pour tout } n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &L_0(\lambda) = 2,\ L_1(\lambda) = 1 + 2\lambda, \\ &L_{n+1}(\lambda) = (1 + 2\lambda)\, L_n(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\, L_{n-1}(\lambda), \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,

$$F_{-n}(\lambda) = \frac{-F_n(\lambda)}{(\lambda^2 + \lambda - 1)^n} \text{ et} \tag{3}$$

$$L_{-n}(\lambda) = \frac{L_n(\lambda)}{(\lambda^2 + \lambda - 1)^n}. \tag{4}$$

Elles vérifient les propriétés admises suivantes pour tout entier $n$ :

$$F_{n+1}(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\, F_{n-1}(\lambda) = L_n(\lambda), \tag{5}$$

$$L_{n+1}(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\, L_{n-1}(\lambda) = 5\, F_n(\lambda). \tag{6}$$

a) I représente la matrice identité dans $\mathbf{R}^2$,

b) $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ est l'ensemble des matrices carrées $2 \times 2$ à coefficients réels,

c) $J \in \mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$ représente une matrice non multiple de I et vérifiant $J^2 = \dfrac{5}{4}\mathrm{I}$,

d) On note $R(\lambda)$ la matrice définie par $R(\lambda) = J + (\lambda + \dfrac{1}{2})\,\mathrm{I}$.

Comme d'habitude, $R(\lambda)^n$ représente la puissance $n$-ième de la matrice $R(\lambda)$. À tout moment, le candidat peut utiliser la formule admise suivante, dite « formule de Moivre », valable pour tout entier naturel $n$ :

$$R(\lambda)^n = F_n(\lambda)\, J + \frac{1}{2}\, L_n(\lambda)\, \mathrm{I}. \tag{7}$$

*L'objectif de ce problème est d'utiliser les propriétés des matrices $R(\lambda)$ pour en déduire des propriétés des suites de Fibonacci et Lucas.*

# I Préliminaires

1. Calculer $F_2(\lambda)$, $L_2(\lambda)$.
2. Exhiber une infinité de matrices $J$ qui satisfassent c).
3. Montrer que les matrices I et $J$ sont linéairement indépendantes sur $\mathfrak{M}_2(\mathbf{R})$.

*Dans tout ce qui suit, $J$ désigne une matrice quelconque vérifiant $J^2 = \frac{5}{4} I$.*

# II Formule de Moivre généralisée

4. Trouver deux polynômes $Q$ et $T$ de $\mathbf{R}[X]$ tels que
$$(X + \lambda + \frac{1}{2})^2 = (X^2 - \frac{5}{4})\,Q(X) + T(X).$$
5. En déduire que $R(\lambda)$ vérifie l'équation suivante :
$$R(\lambda)^2 = (1 + 2\,\lambda)\,R(\lambda) + (1 - \lambda - \lambda^2)\,\mathrm{I}. \tag{8}$$
6. Montrer que $R(\lambda)$ est inversible et montrer que
$$R(\lambda)^{-1} = -\frac{1}{(\lambda^2 + \lambda - 1}\,J + \frac{1}{2}\,\frac{1 + 2\,\lambda}{(\lambda^2 + \lambda - 1)}\,\mathrm{I} \tag{9}$$
7. En utilisant la formule de Moivre, établir que pour $n \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} 2\,F_{n+1}(\lambda) &= L_n(\lambda)\,F_1(\lambda) + L_1(\lambda)\,F_n(\lambda) \\ 2\,L_{n+1}(\lambda) &= 5\,F_n(\lambda)\,F_1(\lambda) + L_n(\lambda)\,L_1(\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$
8. Montrer que la formule de Moivre reste valable pour tout entier négatif.

# III Quelques identités remarquables

9. Montrer l'identité suivante :
$$R(\lambda)^2 + (1 - \lambda - \lambda^2)\,\mathrm{I} = 2\,J\,R(\lambda). \tag{11}$$
10. Soit $W(\lambda) = (\lambda^2 + \lambda - 1)\,R(\lambda)^{-2}$. Montrer que
$$I - W(\lambda) = 2\,J\,R(\lambda)^{-1} \text{ et } (I - W(\lambda))^{-1} = \frac{2}{5}\,J\,R(\lambda).$$
11. Montrer alors que pour tout entier $n \geqslant 0$,
$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda^2 + \lambda - 1)^k\,R(\lambda)^{n-2k} = F_{n+1}(\lambda)\,\mathrm{I}.$$
12. En déduire, pour $n \geqslant 0$, les valeurs de
$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda^2 + \lambda - 1)^k\,F_{n-2k}(\lambda) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} (\lambda^2 + \lambda - 1)^k\,L_{n-2k}(\lambda).$$

Pour $k \geqslant 1$, on introduit
$$\Delta_k(\lambda) = \det \begin{pmatrix} L_{k-1}(\lambda) & L_k(\lambda) \\ L_k(\lambda) & L_{k+1}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

On définit le polynôme $P$ de $\mathbf{R}[X]$ par
$$P(X) = (1 - \lambda - \lambda^2)\,X^2 + (1 + 2\,\lambda)\,X - 1.$$

13. Montrer que $(\Delta_k(\lambda), k \geqslant 1)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
*Indication : on pourra utiliser la linéarité du déterminant par rapport à ses colonnes.*
14. En déduire, pour $k \geqslant 1$, la valeur de
$$L_k(\lambda)^2 \, P(\frac{L_{k-1}(\lambda)}{L_k(\lambda)}).$$

On pose, pour tout $n \in \mathbf{Z}$,
$$F_n = F_n(0) \text{ et } L_n = L_n(0).$$
On a aisément les propriétés admises suivantes :
$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \text{ et } F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$$
$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \text{ et } L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$$
$$F_{n+1} + F_{n-1} = L_n,\ L_{n+1} + L_{n-1} = 5\,F_n$$

15. Montrer que, pour tout $k \geqslant 1$,
$$R(\frac{L_{k-1}}{L_k}) = \frac{2}{L_k}\, J\, R(0)^k. \tag{12}$$
16. Déduire des questions précédentes la propriété suivante : pour tout $n \in \mathbf{Z}$, pour tout $k \geqslant 1$,
$$\begin{aligned} F_{2n}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) &= \frac{5^n}{L_k^{2n}}\, F_{2nk}, \\ L_{2n}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) &= \frac{5^n}{L_k^{2n}}\, L_{2nk}. \end{aligned} \tag{13}$$

Une démarche similaire permet de démontrer les identités suivantes que l'on admettra.
$$\begin{aligned} F_{2n+1}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) &= \frac{5^n}{L_k^{2n+1}}\, L_{k(2n+1)}, \\ L_{2n+1}(\frac{L_{k-1}}{L_k}) &= \frac{5^n}{L_k^{2n+1}}\, F_{k(2n+1)}. \end{aligned} \tag{14}$$

# IV Une touche de probabilités

Soit $i$ un entier impair et $n \geqslant 0$, on pose
$$p_k = \frac{L_i\, L_{2i(n-k)}}{2\, L_{i(2n+1}} \text{ pour } k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\}.$$

17. Montrer que la suite $(p_k,\ k \in \{0, 1, 2, \ldots, 2n\})$ définit une probabilité.
*Indication : on pourra chercher à exprimer $L_{i(2n+1)}$ en utilisant les questions 12, 13 et les identités (14).*

FIN DU PROBLÈME