**CX8611**

**Banque commune École Polytechnique - InterENS**

**PSI**

**Session 2018**

# Épreuve de Mathématiques

## Durée : 4 heures

*Aucun document n'est autorisé.*

*Aucune calculatrice n'est autorisée.*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

On note $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{C}^k([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ est positive si :

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geq 0.$$

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, on définit sa norme infinie par :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille $n$. On définit également $I_n$ la matrice identité de taille $n$. Si $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note :

$$||x||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$$

.

Si $X$ est une variable aléatoire réelle, on note, sous réserve d'existence, $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ son espérance, respectivement sa variance.

Enfin, si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, alors $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ désigne le nombre de parties à $k$ éléments d'un ensemble de cardinal $n$.

On étudie ici l'équation différentielle avec conditions aux limites suivante :

$$\begin{cases} -u''(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $c \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $c$ **positive**.

Après avoir montré l'existence et l'unicité d'une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ au problème (1), on s'intéressera à la construction d'une suite d'approximations de $u$.

Les parties 1, 2 et 5 sont indépendantes. Les parties 3 et 4 nécessitent d'utiliser certains résultats établis dans les parties 1 et 2.

**PARTIE 1 : existence et unicité des solutions de (1)**

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que le problème :

$$\begin{cases} -v_\lambda''(x) + c(x)v_\lambda(x) = f(x), \quad x \in [0,1], \\ v_\lambda(0) = 0, \\ v_\lambda'(0) = \lambda, \end{cases} \tag{1bis}$$

admet une unique solution $v_\lambda \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$.

2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $v_\lambda$ peut s'exprimer sous la forme :

$$v_\lambda = \lambda w_1 + w_2$$

avec $w_1 \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ l'unique solution du système :

$$\begin{cases} -w_1''(x) + c(x)w_1(x) = 0, \quad x \in [0,1], \\ w_1(0) = 0, \\ w_1'(0) = 1, \end{cases}$$

et $w_2$ une fonction indépendante de $\lambda$ à caractériser.

3. Montrer que $w_1(1) \neq 0$.

4. En déduire qu'il existe au moins une solution $u \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ du problème (1). Montrer que cette solution est unique.

5. Montrer que si $f$ est positive, alors $u$ est également positive.

**PARTIE 2 : une matrice de discrétisation**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A_n$ la matrice carrée de taille $n$, constante par diagonale :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Soit $V = {}^t(v_1, ..., v_n)$ un vecteur propre de $A_n$ associé à une valeur propre complexe $\lambda$. Montrer que $\lambda$ est nécessairement réelle et que les composantes $v_i$ de $V$ vérifient la relation :

$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.

7. Montrer que toute valeur propre de $A_n$ est dans l'intervalle $]0, 4[$.

8. Soit $\lambda$ une valeur propre de $A_n$.

a) Montrer que les racines complexes $r_1$ et $r_2$ du polynôme

$$P(r) = r^2 - (2-\lambda)r + 1$$

sont distinctes et conjuguées.

b) On pose $r_1 = \bar{r}_2 = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a nécessairement $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.

9. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de $A_n$ ainsi qu'une base de vecteurs propres.

10. On considère la famille des matrices $B = [b_{i,j}]_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois propriétés suivantes (appelées $M$-matrices) :

$$\forall i \in \{1, ..., n\}, \quad \begin{cases} b_{i,i} > 0 \\ b_{i,j} \leq 0 \quad \text{pour tout } j \neq i \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} > 0 \end{cases}$$

Montrer que si $B$ est une $M$-matrice, alors on a :

a) $B$ est inversible,

b) si $F = {}^t(f_1, ..., f_n)$ a des coordonnées toutes positives, alors $B^{-1}F$ aussi,

c) tous les coefficients de $B^{-1}$ sont positifs.

11. En appliquant les résultats précédents à $A_n + \epsilon I_n$ avec $\epsilon > 0$, montrer que tous les coefficients de $A_n^{-1}$ sont positifs.

**PARTIE 3 : une suite d''approximations de la solution de (1)**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $h = \dfrac{1}{n+1}$ et on considère les réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ définis par $x_i = ih$ pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$.

12. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^4([0,1], \mathbb{R})$, il existe une constante $C \geq 0$, indépendante de $n$, telle que

$$\forall i \in \{1, ..., n\},\ |v''(x_i) - \frac{1}{h^2}(v(x_{i+1}) + v(x_{i-1}) - 2v(x_i))| \leq Ch^2$$

13. Montrer qu'il existe une unique famille de réels $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ vérifiant

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{h^2}(u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i) + c(x_i)u_i = f(x_i), \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \\ u_0 = u_{n+1} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

14. On suppose (dans cette question seulement) que $c(x) = 0$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in [0,1]$. On note $u$ la solution exacte du problème (1). Montrer que pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$, on a

$$u_i = u(x_i) = \frac{1}{2}x_i(1 - x_i)$$

15. Montrer que si $f$ est positive, alors $u_i \geq 0$ pour tout $i \in \{0, ..., n+1\}$.

**PARTIE 4 : un premier résultat de convergence**

Dans toute cette partie, on supposera de plus que $c \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ et que $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ ($c$ est toujours positive également).

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit l'application $N$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ par la relation :

$$N(A) = \sup\{||Ax||_\infty, \quad ||x||_\infty \leq 1\}$$

Montrer que $N$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que si $A = [a_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$, alors

$$N(A) = \max_{i \in \{1,...,n\}} (\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|)$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) En utilisant les résultats des questions 14 et 15, montrer que pour la matrice $A_n$ définie au début de la partie 2, on a :

$$N\left(((n+1)^2 A_n)^{-1}\right) \leq \frac{1}{8}$$

b) En déduire que pour toute matrice diagonale $D_n = [d_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $d_{i,i} \geq 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, on a également

$$N\left(((n+1)^2 A_n + D_n)^{-1}\right) \leq \frac{1}{8}$$

18. Soit $u$ l'unique solution du problème (1) et $(u_i)_{0 \leq i \leq n+1}$ la famille définie par la relation (2) pour $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'"il existe une constante $\tilde{C} > 0$, indépendante de $n$, telle que

$$\max_{0 \leq i \leq n+1} |u(x_i) - u_i| \leq \frac{\tilde{C}}{n^2}$$

*Indication : on pourra introduire le vecteur* $X = {}^t(\epsilon_1, ..., \epsilon_n)$ *où on a posé* $\epsilon_i = u(x_i) - u_i$ *et calculer* $A_n X$.

**PARTIE 5 : un second résultat de convergence**

On suppose dans cette partie que $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ est telle que :

$$\exists \alpha \in ]0,1],\ \exists K \geq 0,\ \forall (y,z) \in [0,1]^2,\ |f(y) - f(z)| \leq K|y-z|^{\alpha}.$$

On suppose également que :

$$\forall x \in [0,1], \quad c(x) = 0$$

On note $u$ est la solution associée du système (1).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les deux polynômes :

$$\begin{aligned} B_n f(X) &= \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k (1-X)^{n-k}, \\ \widehat{B}_{n+1} u(X) &= \sum_{k=0}^{n+1} u_k \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} X^k (1-X)^{n+1-k}, \end{aligned}$$

où $u_0, \cdots, u_{n+1}$ sont solutions du système (2), avec $c = 0$.

19. Soit $x \in ]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $x$. On pose

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

a) Exprimer $\mathbb{E}(S_n)$, $\mathrm{Var}(S_n)$ et $\mathbb{E}(f(S_n))$ en fonction de $x$, $n$ et du polynôme $B_n f$.

b) En déduire les inégalités :

$$\sum_{k=0}^{n} |x - \frac{k}{n}| \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k (1-x)^{n-k} \leq \mathrm{Var}(S_n)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

20. Montrer que $\lambda^\alpha \leq 1 + \lambda$ pour tout réel $\lambda > 0$ et en déduire l'inégalité :

$$\left| x - \frac{k}{n} \right|^\alpha \leq n^{-\alpha/2} \left( 1 + \sqrt{n} \left| x - \frac{k}{n} \right| \right)$$

pour tous $x \in ]0,1[$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, ..., n\}$.

21. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\|f - B_n f\|_\infty \leq \frac{3K}{2} \frac{1}{n^{\alpha/2}}.$$

*Indication : On pourra dans un premier temps exprimer $f(x) - B_n f(x)$ en fonction de $\mathbb{E}(f(x) - f(S_n))$.*

22. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in ]0,1[$ on a :

$$(\widehat{B}_{n+1} u)''(x) = -\frac{n}{n+1} \sum_{\ell=0}^{n-1} f(\frac{\ell+1}{n+1}) \begin{pmatrix} n-1 \\ \ell \end{pmatrix} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell},$$

23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$. On pose $\chi_{n+1} = \widehat{B}_{n+1} u - u$.

a) Montrer que :

$$\|\chi''_{n+1}\|_\infty \leq \|f - B_{n-1} f\|_\infty + \frac{1}{n+1} \|f\|_\infty + K \frac{1}{(n+1)^\alpha}.$$

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ il existe $\xi \in [0,1]$ tel que

$$\chi_{n+1}(x) = -\frac{1}{2}x(1-x)\chi''_{n+1}(\xi).$$

*Indication : on pourra pour* $x \in ]0,1[$ *considérer la fonction*

$$h(t) = \chi(t) - \frac{\chi(x)}{x(1-x)}t(1-t),\ t \in [0,1].$$

24. En déduire qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\|u - \widehat{B}_{n+1}u\|_\infty \leq \frac{M}{n^{\alpha/2}}.$$