Treizième devoir à la maison

Premier exercice
[E3A17]

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,$$
$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer de deux manières différentes que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire $Z = X-1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$. En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}.$$

On pourra remarquer que $k + (r-k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

7. On note $B \in \mathfrak{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est :

$$b_{ij} = P([(X,Y) = (i,j)]).$$

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\mathrm{tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Second exercice
[MP]

Soient $n \geqslant 2$, $p \in]0,1[$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $X_1 \sim \mathscr{B}(p)$. Soient $U \in \mathfrak{M}_{n,1}(\{0,1\})$ et $M \in \mathfrak{M}_n(\{0,1\})$ définies par

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = UU^\top.$$

1. Trouver la loi de probabilité de $\mathrm{rg}(M)$ et de $\mathrm{tr}(M)$.

2. Quelle est la probabilité que M soit une matrice de projection ?

3. Si $V = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on note S la variable aléatoire

$$S = V^\top M V.$$

Calculer l'espérance et la variance de S.