Corrigé du treizième devoir à la maison

Premier exercice

1. *Binôme de Newton.* On voit que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k}=(1+1)^n=2^n.$$

Dénombrement. Considérons l'ensemble $E=[\![1,n]\!]$ et l'ensemble de ses parties $\mathscr{P}(E)$. On sait que $\operatorname{card}(E)=n$ et $\operatorname{card}(\mathscr{P}(E))=2^n$. Écrivons

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}(E))=\sum_{A\in\mathscr{P}(E)}1.$$

Dans cette somme, regroupons les parties de E par leur cardinal $k\in[\![1,n]\!]$:

$$\operatorname{card}(\mathscr{P}(E))=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{A\in\mathscr{P}(E)\\ \operatorname{card}(A)=k}}1.$$

La somme intérieure est le nombre de parties de E contenant k éléments : il y en a exactement $\binom{n}{k}$. Ainsi,

$$2^n=\operatorname{card}(\mathscr{P}(E))=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}.$$

2. Par définition de la loi du couple (X,Y),

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n+1]\!]^2}P(X=i,Y=j)=1$$

d'où

$$\begin{aligned}1&=\alpha\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &=\alpha\Bigg(\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\Bigg)\Bigg(\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\Bigg)=\alpha\,2^n\,2^n.\end{aligned}$$

Donc $\alpha=2^{-2n}=4^{-n}$.

3. Soit $i\in[\![1,n+1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}P(X=i)&=\sum_{j=1}^{n}P(X=i,Y=j)\\ &=\frac{1}{4^n}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\\ &=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}2^n=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}.\end{aligned}$$

De même, si $j\in[\![1,n+1]\!]$,

$$P(Y=j)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}.$$

Où l'on voit que pour tout $(i,j)\in[\![1,n+1]\!]$,

$$\begin{aligned}P(X=i,Y=j)&=\frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}\\ &=\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}\frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}=P(X=i)\,P(Y=j),\end{aligned}$$

donc $X\perp\!\!\!\perp Y$.

4. Comme $X(\Omega)=[\![1,n+1]\!]$, $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$. Pour $k\in[\![0,n]\!]$,

$$\begin{aligned}P(Z=k)&=P(X-1=k)=P(X=k+1)\\ &=\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}=\binom{n}{k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}},\end{aligned}$$

où l'on reconnait que $Z\sim\mathscr{B}(n,\frac{1}{2})$. Donc

$$E(X)=E(Z+1)=E(Z)+1=\frac{n}{2}+1,$$

et $$V(X)=V(Z+1)=V(Z)=\frac{n}{4}.$$

5. *Première façon.* Le nombre de parties à r éléments de A est

$$\binom{p+q}{r}.$$

Deuxième façon. Considérons que $A=B\cup C$ où $\operatorname{card}(B)=p$, $\operatorname{card}(C)=q$ et bien-sûr $B\cap C=\varnothing$. Alors, pour une partie $D\subset A$ de cardinal r, on a

$$D=D\cap A=D\cap(B\cup C)=(D\cap B)\cup(D\cap C).$$

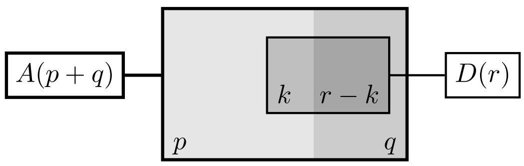
Comme B et C sont disjoints, $D\cap B$ et $D\cap C$ le sont aussi, donc

$$\operatorname{card}(D)=\operatorname{card}(D\cap B)+\operatorname{card}(D\cap C),$$

ou encore, en notant $k=\operatorname{card}(D\cap B)$,

$$r=k+(r-k).$$

L'égalité algébrique est une complète trivialité, mais c'est son interprétation ensembliste qui importe. Voici une illustration possible de la situation.



Pour choisir dans A une partie D de cardinal r, il faut et il suffit donc de choisir dans B une partie $D\cap B$ de cardinal k — il y a $\binom{p}{k}$ choix possibles — et de choisir dans C une partie $D\cap C$ de cardinal $r-k$ — il y a $\binom{q}{r-k}$ choix possibles : il y a donc $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ choix possibles pour D, avec la contrainte que $D\cap B$ contient k éléments. Pour compter le nombre de parties D à r éléments, il reste à sommer sur k : le nombre de telles parties est donc

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

Conclusion. Finalement,

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}=\binom{p+q}{r}.$$

6. En prenant $p = q = r = n$ dans cette formule et sachant que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

7.1. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$b_{ij} = \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

Alors, la colonne j de B est

$$C_j(B) = \frac{1}{4^n}\binom{n}{j-1}\begin{pmatrix}\binom{n}{0}\\ \binom{n}{1}\\ \vdots \\ \binom{n}{n}\end{pmatrix} = \frac{1}{4^n}\binom{n}{j-1} C$$

en notant

$$C = \begin{pmatrix}\binom{n}{0}\\ \binom{n}{1}\\ \vdots \\ \binom{n}{n}\end{pmatrix}.$$

Donc toutes les colonnes sont proportionnelles à C, qui n'est pas la colonne nulle, donc puisque B n'est pas nulle, $\mathrm{rg}(B) = 1$.

7.2. Par définition

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{n+1} b_{ii} &= \frac{1}{4^n}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}^2 \\ &= \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.\end{aligned}$$

Second exercice

1. Rang. À l'évidence, les colonnes de M sont toutes liées à U. Donc si $U \neq 0$, $\mathrm{rg}(M) = 1$ et sinon, $M = 0$ et $\mathrm{rg}(M) = 0$. La probabilité que ça arrive est donc celle que U soit nul, c'est-à-dire, puisque les X_i sont indépendantes,

$$\begin{aligned}P(U = 0) &= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(X_i = 0)\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i = 0) = (1-p)^n.\end{aligned}$$

Ainsi, en posant $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned}P(\mathrm{rg}(M) = 0) &= P(U = 0) = q^n, \\ P(\mathrm{rg}(M) = 1) &= P(U \neq 0) = 1 - q^n.\end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathrm{rg}(M) \sim \mathscr{B}(1 - q^n)$.

Trace. Le coefficient général de M est $X_i X_j$, donc

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2.$$

Mais $X_i \in \{0, 1\}$, donc $X_i^2 = X_i$ et

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Donc d'après le cours, comme les X_i sont indépendantes, $\mathrm{tr}(M) \sim \mathscr{B}(n, p)$.

2. On a

$$M^2 = (U U^\top)(U U^\top) = U (U^\top U) U^\top.$$

Or

$$U^\top U = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = \mathrm{tr}(M),$$

donc

$$M^2 = U (\mathrm{tr}(M)) U^\top = \mathrm{tr}(M) M.$$

Ainsi, la probabilité que M soit une matrice de projection est celle que $\mathrm{tr}(M) = 1$, c'est-à-dire

$$\binom{n}{1} p^1 q^{n-1} = n p (1-p)^{n-1}.$$

3. Espérance. On a

$$\begin{aligned}S = V^\top M V &= V^\top (U U^\top) V \\ &= (U^\top V)^\top (U^\top V) = (U^\top V)^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 = \mathrm{tr}(M)^2.\end{aligned}$$

Notons $T = \mathrm{tr}(M)$, de sorte que $S = T^2$. Alors d'après le théorème de König-Huygens,

$$E(S) = E(T^2) = V(T) + E(T)^2 = n p q + n^2 p^2,$$

sachant que $T \sim \mathscr{B}(n, p)$.

Variance. Toujours avec le théorème de König-Huygens, $V(S) = E(S^2) - E(S)^2$. Et d'après le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}E(S^2) = E(T^4) &= \sum_{k=0}^{n} k^4 P(T = k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k^4 \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

Ici, pour avancer, l'idée (*une* idée) est de décomposer le polynôme X^4 dans la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-2)(X-3))$ de $\mathbb{R}_4[X]$. C'est bien une base car elle contient 5 polynômes de degrés échelonnés. On a, par tâtonnements,

$$\begin{aligned}X^4 = {} & X(X-1)(X-2)(X-3) \\ & + 6X(X-1)(X-2) + 7X(X-1) + X.\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}E(S^2) = {} & \sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)(k-3)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ & + 6\sum_{k=1}^{n} k(k-1)(k-2)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ & + 7\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\ & + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} p^k q^{n-k}.\end{aligned}$$

Traitons la première somme : pour $k \geqslant 4$,

$$\begin{aligned}
&k\,(k-1)\,(k-2)\,(k-3)\,\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\\
&= \frac{n!}{(k-4)!\,(n-4-(k-4))!}\\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\binom{n-4}{k-4}.
\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)\,(k-2)\,(k-3)\binom{n}{k} p^k\,q^{n-k}\\
&= \sum_{k=4}^{n} k\,(k-1)\,(k-2)\,(k-3)\binom{n}{k} p^k\,q^{n-k}\\
&= \sum_{k=4}^{n} n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\binom{n-4}{k-4} p^k\,q^{n-k}\\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\sum_{j=0}^{n-4}\binom{n-4}{j} p^{j+4}\,q^{n-(j+4)}\\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4\sum_{j=0}^{n-4}\binom{n-4}{j} p^{j}\,q^{n-4-j}\\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4\,(p+q)^{n-4}\\
&= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4.
\end{aligned}$$

Les autres sommes se traitent sur le même principe. Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(S^2) &= n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,p^4\\
&\quad + 6\,n\,(n-1)\,(n-2)\,p^3\\
&\quad + 7\,n\,(n-1)\,p^2 + n\,p.\\
&= n^4\,p^4 + n^3\,(-6p^4 + 6p^3)\\
&\quad + n^2\,(11p^4 - 18p^3 + 7p^2)\\
&\quad + n\,(-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p)
\end{aligned}$$

En outre,

$$\begin{aligned}
E(S)^2 &= (n^2\,p^2 + n\,(p-p^2))^2\\
&= n^4\,p^4 + n^3\,(-2p^4 + 2p^3)\\
&\quad + n^2\,(p^4 - 2p^3 + p^2).
\end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
V(S) &= E(S^2) - E(S)^2\\
&= n^3\,(-4p^4 + 4p^3)\\
&\quad + n^2\,(10p^4 - 16p^3 + 6p^2)\\
&\quad + n\,(-6p^4 + 12p^3 - 7p^2 + p).
\end{aligned}$$

ouf !

Bonus. Les idées et structures dans les calculs sont évidemment miennes. Mais pour certains calculs effectifs, j'ai appelé Python à la rescousse. Voici comment.

Importation de la libraire de calcul formel et déclaration de deux symboles formels utilisés ensuite.

```
>>> from sympy import *
>>> n, p = symbols('n p')
```

Déclaration des quatre (sur cinq) polynômes nécessaires, extraits de la base évoquée plus haut, directement avec la variable n.

```
>>> P1 = n
>>> P2 = P1*(n-1)
>>> P3 = P2*(n-2)
>>> P4 = P3*(n-3)
```

Tâtonnements pour l'expression de n^4 dans la base.

```
>>> expand(P4)
n**4 - 6*n**3 + 11*n**2 - 6*n
>>> expand(_ + 6*P3)
n**4 - 7*n**2 + 6*n
>>> expand(_ + 7*P2)
n**4 - n
>>> expand(_ + P1)
n**4
```

Développement de $E(S^2)$ dans cette base.

```
>>> ES2 = P4*p**4 + 6*P3*p**3
          + 7*P2*p**2 + P1*p
>>> expand(ES2)
n**4*p**4 - 6*n**3*p**4 + 6*n**3*p**3
+ 11*n**2*p**4 - 18*n**2*p**3 + 7*n**2*p**2
- 6*n*p**4 + 12*n*p**3 - 7*n*p**2 + n*p
>>> collect(_, n)
n**4*p**4 + n**3*(-6*p**4 + 6*p**3)
+ n**2*(11*p**4 - 18*p**3 + 7*p**2)
+ n*(-6*p**4 + 12*p**3 - 7*p**2 + p)
```

Développement de $E(S)^2$.

```
>>> ES = n**2*p**2 + n*p*(1-p)
>>> expand(ES**2)
n**4*p**4 - 2*n**3*p**4 + 2*n**3*p**3
+ n**2*p**4 - 2*n**2*p**3 + n**2*p**2
>>> collect(_, n)
n**4*p**4 + n**3*(-2*p**4 + 2*p**3)
+ n**2*(p**4 - 2*p**3 + p**2)
```

Final !

```
>>> expand(ES2 - ES**2)
-4*n**3*p**4 + 4*n**3*p**3 + 10*n**2*p**4
- 16*n**2*p**3 + 6*n**2*p**2 - 6*n*p**4
+ 12*n*p**3 - 7*n*p**2 + n*p
>>> collect(_, n)
n**3*(-4*p**4 + 4*p**3)
+ n**2*(10*p**4 - 16*p**3 + 6*p**2)
+ n*(-6*p**4 + 12*p**3 - 7*p**2 + p)
```

Commentaires.

Il aurait surement été profitable d'utiliser la matrice de changement de base. À vous de jouer :-)