Quatorzième devoir à la maison

Méthode de Stein

[MP15]

— On note $\mathscr{F}$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

— On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des suites de nombres réels positifs de somme égale à 1 :

$$\mathscr{P} = \left\{ P = (p_n, n \geqslant 0) \text{ tel que } \forall n \geqslant 0,\ p_n \geqslant 0 \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1 \right\}.$$

— Pour P et Q deux éléments de $\mathscr{P}$, on définit

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P,Q) &= \sup_{A \subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n\in A} p_n - \sum_{n \in A} q_n \right| \\ &= \sup_{A\subset \mathbf{N}} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n)\, p_n - \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_A(n)\, q_n \right|\end{aligned}$$

où $\mathbf{1}_A(n) = 1$ si $n \in A$ et $\mathbf{1}_A(n) = 0$ sinon. On pourra écrire $P(A)$ pour $\sum_{n\in A} p_n$.

— Dans tout ce qui suit, λ est un réel strictement positif fixé et h est un élément de $\mathscr{F}$, c'est-à-dire une fonction bornée de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

I Préliminaires

1. Trouver le réel c tel que la suite

$$c\,\frac{\lambda^n}{n!}, n \geqslant 0,$$

appartienne à $\mathscr{P}$.

2. Soit p et q deux réels de $[0,1]$. Calculer

$$\operatorname{dist}\big((1-p,p,0,\ldots),(1-q,q,0,\ldots)\big).$$

3. Soit $f \in \mathscr{F}$ et $P \in \mathscr{P}$, montrer que la série de terme général $(f(n)\,p_n,\ n \geqslant 0)$ est convergente.

II Caractérisation

Soit $P_\lambda = (p_n^{(\lambda)}, n \in \mathbf{N}) \in \mathscr{P}$ défini par

$$p_n^{(\lambda)} = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^n}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbf{N}.$$

4. Soit $f \in \mathscr{F}$, montrer que la série de terme général $(n\,f(n)\,p_n^{(\lambda)},\ n \geqslant 0)$ est convergente.

5. Pour tout $f \in \mathscr{F}$, établir l'identité suivante :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\,p_n^{(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} n\,f(n)\,p_n^{(\lambda)}. \tag{1}$$

Soit $Q = (q_n,\ n \geqslant 0)$ un élément de $\mathscr{P}$ tel que pour tout $f \in \mathscr{F}$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} f(n+1)\,q_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\,f(n)\,q_n.$$

6. En choisissant convenablement des éléments de $\mathscr{F}$, montrer que $Q = P_\lambda$.

III Résolution de l'équation de Stein

On note $\mathscr{S}_h$, l'ensemble des fonctions f de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$, telles que, pour tout entier $n \geqslant 0$, l'identité suivante soit satisfaite :

$$\lambda\,f(n+1) - n\,f(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,p_k^{(\lambda)}. \tag{2}$$

Pour simplifier les notations, on note $\widetilde{h}$ la fonction définie pour tout $n \geqslant 0$ par

$$\widetilde{h}(n) = h(n) - \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,p_k^{(\lambda)}.$$

7. Montrer que $\mathscr{S}_h$ possède une infinité d'éléments et que pour tout $f \in \mathscr{S}_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$f(n) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{h}(k)\,\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{3}$$

8. Pour $f \in \mathscr{S}_h$, pour tout entier $n \geqslant 1$, établir l'identité suivante :

$$f(n) = -\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \sum_{k=n}^{\infty} \widetilde{h}(k)\,\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{4}$$

9. En déduire que toute fonction $f \in \mathscr{S}_h$ est bornée.