Quinzième devoir à la maison

[ENS00]

Avertissement : Les labels **Qn**, avec $0 \leqslant n \leqslant 13$, indiquent les questions, certaines d'entre elles étant découpées en sous-questions numérotées de 1 à j, avec $j \leqslant 5$. Le problème s'achève avec l'étude de deux exemples.

Notations

Le problème concerne l'étude des matrices carrées à coefficients réels, dont l'ensemble est noté $M_n(\mathbb{R})$. La matrice nulle est notée 0_n et la matrice identité est I_n. L'ensemble $GL_n(\mathbb{R})$ des matrices inversibles forme un groupe (dit *groupe linéaire*) pour la multiplication des matrices. Ses éléments sont les matrices de déterminant non nul.

On notera $O(n)$ le groupe orthogonal et $S(n)$ l'ensemble des matrices symétriques réelles à n lignes. On a donc $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ et $S(n) \subset M_n(\mathbb{R})$. Rappelons que $O(n)$ est l'ensemble des matrices M de $M_n(\mathbb{R})$ qui satisfont ${}^tMM = I_n$ ou, ce qui revient au même, $M{}^tM = I_n$.

On identifie canoniquement les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes à n lignes. En particulier, $M_1(\mathbb{R})$ est identifié à $\mathbb{R}$.

On admettra l'énoncé suivant (interpolation polynomiale) : *si $d_1 < \ldots < d_n$ et $a_1, \ldots, a_n$ sont des nombres réels, il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $p(d_j) = a_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.*

Fonctions de matrices

Q0. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que $q(PMP^{-1}) = Pq(M)P^{-1}$ pour tout $q \in \mathbb{R}[X]$.

Q1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ et p, q deux polynômes à coefficients réels. On suppose que $p(\lambda) = q(\lambda)$ pour chaque valeur propre (réelle ou complexe) de M et que M est diagonalisable. Montrer que $p(M) = q(M)$.

Q2. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et si p est un polynôme tel que $p(\lambda) = \exp \lambda$ pour toute valeur propre de M, on note $\exp M$ (l'*exponentielle* de M) la matrice $p(M)$. Montrer que cette définition n'est pas ambiguë.

Q3. Soit $D \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale et $t \in \mathbb{R}$. Expliciter la matrice $\exp(tD)$. Montrer que la fonction à valeurs vectorielles $h : t \mapsto \exp(tD)$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

Q4. 1. Soit $g : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ et $h : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ deux fonctions continûment dérivables. Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to M_n(R)$, définie par $f(t) = g(t)h(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f'(t) = g(t)h'(t) + g'(t)h(t)$.

2. En déduire que, si $M \in M_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, la fonction $h : t \mapsto \exp(tM)$ est dérivable et que $h'(t) = Mh(t) = h(t)M$.

Matrices symétriques définies positives

Q5. 1. Si $M \in M_n(\mathbb{R})$ et $X \in \mathbb{R}^n$, vérifier que ${}^tXMX$ est un nombre. Exprimer ce nombre au moyen des coefficients de X et M. Que reconnaissez vous lorsque $M = I_n$?

Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, on définit une application $f_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par $f_M(X) = {}^tXMX$. On pourra remarquer que $f_{{}^tM} = f_M$.

2. Si $M \in GL_n(\mathbb{R})$, exprimer $f_{M^{-1}}(X)$ sous la forme $f_M(Y)$ pour un vecteur Y convenable.

3. Soit $M \in S(n)$. On dit que M est *définie positive* si $X \neq 0$ implique $f_M(X) > 0$. On désigne par $S^+(n)$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que $M \in S^+(n)$ entraîne que M est inversible et que $M^{-1} \in S^+(n)$.

4. Soit $M \in S^+(n)$ et $P \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tPMP \in S^+(\mathbb{R})$.

5. Soit $N \in S(n)$. Montrer que $\exp N \in S^+(n)$.

Q6. Soit $M \in S^+(n)$.

1. Montrer qu'il existe $P \in O(n)$ et une matrice diagonale D, réelle avec $d_{ii} > 0$ pour tout i, telles que $M = PDP^{-1}$.

2. Soit p un polynôme réel tel que $p(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ pour toute valeur propre λ de M. Montrer que la matrice $N = p(M)$ ne dépend pas du choix de p et satisfait $N^2 = M$.

On appelle N la racine carrée de M et on note $N = \sqrt{M}$.

3. Montrer que $\sqrt{M} \in S^+(n)$. En déduire que $N \mapsto N^2$ est une bijection de $S^+(n)$ dans lui-même.

4. Montrer que $\sqrt{M^{-1}} = \sqrt{M}^{-1}$.

Q7. Par une méthode analogue, montrer que $\exp : S(n) \to S^+(n)$ est une bijection (on pourra d'abord construire l'application réciproque).

Q8. Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On définit $M = {}^tAA$.

1. Montrer que $M \in S^+(n)$.

2. Soit $N = \sqrt{M}$, puis $P = AN^{-1}$. Montrer que $P \in O(n)$.

L'égalité $A = PN$, avec $P \in O(n)$ et $N \in S^+(n)$, est appelée *décomposition polaire* de A.

3. Montrer que la décomposition polaire de A est unique.

Structure des groupes polaires

Si G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, nous dirons que G est *polaire* s'il vérifie les deux propriétés suivantes

— G est stable par transposition : $A \in G$ implique ${}^tA \in G$;

— si $M \in G \cap S^+(n)$, alors $\sqrt{M} \in G$.

Q9. Soit G un sous-groupe polaire de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que G est stable par la décomposition polaire : si $A = PM$ avec $A \in G$, $P \in O(n)$ et $M \in S^+(n)$, alors $P, M \in G$. Montrer que $G \cap O(n)$ est un sous-groupe multiplicatif.

Q10. Dans cette question et jusqu'à la fin du problème, $J \in M_n(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant ${}^tJ = \varepsilon J$ et $J^2 = \alpha I_n$, où $\varepsilon, \alpha \in \{-1, +1\}$. On définit l'ensemble

$$G = \{A \in M_n(\mathbb{R}) ; {}^tAJA = J\}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et que $\det A = \pm 1$ pour tout $A \in G$.

2. Montrer que G est stable par transposition.

3. Soit $M \in S^+(n)$. Notant U l'ensemble formé par les valeurs propres λ_j de M et leurs inverses $1/\lambda_j$, montrer qu'il existe un polynôme $p \in \mathbb{R}[X]$ tel que $p(\lambda) = \sqrt{\lambda}$ pour tout $\lambda \in U$. En déduire que $p(M) = \sqrt{M}$ et $p(M^{-1}) = \sqrt{M}^{-1}$.

4. Soit $M \in G \cap S^+(n)$. Montrer que $q(M^{-1})J = Jq(M)$ pour tout polynôme $q \in \mathbb{R}[X]$ (on pourra commencer par le cas des monômes).

5. En déduire que G est un groupe polaire.

Q11. 1. On définit l'ensemble

$$\widehat{G} = \{N \in M_n(\mathbb{R}) ; {}^tNJ + JN = 0_n\}.$$

Montrer que $\widehat{G}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ et que $N \in \widehat{G}$ implique ${}^tN \in \widehat{G}$.

2. Soit $N \in \widehat{G}$ une matrice diagonalisable, $t \in \mathbb{R}$ et soit $M(t) = \exp(tN)$. Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} {}^tM(t)JM(t)$ et en déduire que $M(t) \in G$.

3. Réciproquement, soit $N \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\exp(tN) \in G$. Montrer que $N \in G$.

Q12. Soit $M \in G \cap S^+(n)$.

1. Soit N la matrice symétrique réelle telle que $\exp N = M$. Si $t \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un polynôme $r \in \mathbb{R}[X]$ tel que $r(M) = \exp(tN)$ et $r(M^{-1}) = \exp(-tN)$.

2. En déduire que $\exp(tN) \in G$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3. Conclure que $\exp : \widehat{G} \cap S(n) \to G \cap S^+(n)$ est une bijection.

Q13. Vérifier que $(P, N) \mapsto P \exp N$ réalise une bijection de $H \times V$ dans G, où H est un sous-groupe de $O(n)$ et V est un sous-espace vectoriel de $S(n)$.

Exemple 1. Si $n = p + q$, avec $p, q \geqslant 1$, on choisit J de la façon suivante (décomposition par blocs) :

$$J = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p\times q} \\ 0_{q\times p} & -I_q \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la dimension de V.

2. Montrer que l'application

$$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0_{p\times q} \\ 0_{q\times p} & B \end{pmatrix}$$

est une bijection de $O(p) \times O(q)$ dans H.

Exemple 2. De même, si $n = 2m$, avec $m \in \mathbb{N}^*$, on choisit J sous la forme

$$J = \begin{pmatrix} 0_m & I_m \\ -I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

3. Calculer la dimension de V.

4. Montrer que H est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

où ${}^tAA + {}^tBB = I_m$ et ${}^tAB = {}^tBA$.