Seizième devoir à la maison

Étude d'un procédé de sommation
[CCP06]

À toute suite complexe a , on associe la suite a^* définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k.$$

PARTIE I : DEUX EXEMPLES

I.1/ CAS D'UNE SUITE CONSTANTE. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha$.

I.1.1/ Expliciter $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.2/ Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

I.1.3/ La série $\sum_{n \geq 0} a_n$ (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n^*$) est-elle convergente ?

I.2/ CAS D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE. Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = z^n$.

I.2.1/ Exprimer a_n^* en fonction de z et n .

I.2.2/ On suppose que $|z| < 1$.

I.2.2.1/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

I.2.2.2/ Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

I.2.3/ On suppose que $|z| \geq 1$.

I.2.3.1/ Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?

I.2.3.2/ Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ si $z = -2$?

I.2.3.3/ On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$.

PARTIE II : ÉTUDE DU PROCÉDÉ DE
SOMMATION

Dans cette partie, on suppose que a est réelle.

II.1/ COMPARAISON DES CONVERGENCES DES DEUX SUITES.

II.1.1/ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère un entier k fixé, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

II.1.1.1/ Préciser un équivalent de $\binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.1.2/ En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.2/ Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé. On considère pour $n > q$ la somme

$$S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \binom{n}{k} \frac{a_k}{2^n}.$$

Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

II.1.3/ On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

II.1.4/ On suppose que a_n tend vers ℓ (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

II.1.5/ La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

II.2/ COMPARAISON DES CONVERGENCES DES SÉRIES $\sum_{n \geq 0} a_n$ ET $\sum_{n \geq 0} a_n^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*, \quad U_n = 2^n T_n.$$

II.2.1/ Pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k , c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$.

II.2.2/ On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

II.2.2.1/ À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question II.2.1 ?

II.2.2.2/ Établir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

II.2.3/ On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

II.2.4/ La convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} a_n^*$?