Dix-septième devoir à la maison

[E3A10]

Durée 3 h

L'usage de calculatrice est interdit.

AVERTISSEMENT. Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux. Les questions doublement étoilées ne sont PAS à traiter.

Ce problème a pour objet l'étude de la transformation de Laplace. Dans tout le problème, E désignera l'ensemble constitué par toutes les fonctions f , définies et continues sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles et vérifiant la propriété suivante :

il existe un réel $A > 0$, un réel $C > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall t \geq A, |f(t)| \leq C t^n.$$

PARTIE I : LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

1. Pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, on considère l'intégrale impropre

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt.$$

(a) Vérifier que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale

$$I_0(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$$

est convergente et que

$$I_0(x) = \frac{1}{x}.$$

(b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geq 0$ et tout réel $x > 0$, l'intégrale $I_n(x)$ est convergente et

$$I_n(x) = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

2. (a) Montrer que, muni des opérations usuelles, E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur $[0, +\infty[$ à valeurs réelles.

(b) Vérifier que toute fonction continue et bornée sur $[0, +\infty[$ appartient à E .

(c) Montrer que toute fonction polynomiale sur $[0, +\infty[$ appartient à E .

3. On se donne $f \in E$.

(a) Soit x un réel strictement positif; montrer que la fonction $t \mapsto f(t)e^{-xt}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

On notera alors jusqu'à la fin du problème

$$\mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt} dt.$$

(b) Énoncer le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

(c) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que l'application $x \mapsto \mathcal{L}(f)(x)$ est continue sur l'intervalle $[x_0, +\infty[$. En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$, appelée transformation de Laplace, est une application linéaire de E dans l'espace constitué des applications définies et continues sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles.

PARTIE II : QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRANSFORMÉES DE LAPLACE

Dans cette partie, on se donne $f \in E$.

1. On considère des réels $A > 0$, $C > 0$ et un entier n tels que $|f(t)| \leq C t^n$ pour tout réel $t \geq A$.

(a) Montrer que pour tout réel $x > 0$,

$$|\mathcal{L}(f)(x)| \leq \int_0^A |f(t)e^{-xt}| dt + C \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

(b) Montrer que

$$\int_0^A |f(t)e^{-xt}| dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

(c) En déduire que $\mathcal{L}(f)(x) \rightarrow 0$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

2. (a) On fixe un réel $x_0 > 0$. Montrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x_0, +\infty[$ en énonçant le théorème utilisé.

(b) En déduire que $\mathcal{L}(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$(\mathcal{L}(f))'(x) = - \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt.$$

3. On suppose de plus que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et que $f' \in E$.

(a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\mathcal{L}(f')(x) = x \mathcal{L}(f)(x) - f(0).$$

(b) Vérifier que la fonction $h : t \mapsto t f'(t)$ appartient à E et montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\mathcal{L}(h)(x) = -\mathcal{L}(f)(x) - x(\mathcal{L}(f))'(x).$$

(c) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et que $f'' \in E$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, exprimer $\mathcal{L}(f'')(x)$ en fonction de x , $\mathcal{L}(f)(x)$, $f(0)$ et $f'(0)$.

PARTIE III : UNE APPLICATION DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans cette partie, on se donne un entier $p \geq 1$ et on considère :

— le problème de Cauchy

$$(P) \quad \begin{cases} y''(t) - ty'(t) + 2py(t) = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0 \end{cases}$$

où y désigne une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles ;

— l'équation différentielle

$$(J) \quad xu'(x) + (x^2 + 2p + 1)u(x) = x,$$

où u désigne une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles.

1. Justifier que (P) possède une solution et une seule définie sur tout $\mathbb{R}$, que l'on notera Y .

L'objectif de cette partie est d'explicitier Y en passant par l'intermédiaire de sa transformée de Laplace. Dans ce but, on note f la restriction de Y à l'intervalle $]0, +\infty[$ et on admet que f, f' et f'' appartiennent à E . On note alors $U = \mathcal{L}(f)$.

2. À l'aide des résultats de la partie II, montrer que U est une solution de (J) sur $]0, +\infty[$.

3. Pour tout entier $n \geq 0$, on note f_n la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto x^{2n+1} e^{x^2/2}$ qui s'annule en 0.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier n et tout réel x une relation entre $f_{n+1}(x)$ et $f_n(x)$.

(b) En déduire que pour tout entier n et tout réel x ,

$$f_n(x) = (-1)^{n+1} 2^n n! + n! e^{x^2/2} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{2^k}{(n-k)!} x^{2n-2k}.$$

4. (a) Donner une base de l'espace des solutions de l'équation sans second membre associé à (J) sur $]0, +\infty[$.

(b) En déduire que l'ensemble des solutions de (J) sur l'intervalle $]0, +\infty[$ est constitué des fonctions de la forme

$$u(x) = C \frac{e^{-x^2/2}}{x^{2p+1}} + p! \sum_{k=0}^p (-1)^k \frac{2^k}{(p-k)!} \frac{1}{x^{2k+1}},$$

où C est un réel quelconque.

5. (a) Parmi les solutions ci-dessus, on désigne par U_0 celle correspondant à $C = 0$. Montrer, à l'aide des résultats de la partie I, qu'il existe un polynôme R , dont on donnera les coefficients, tel que la restriction R_0 de R à $]0, +\infty[$ vérifie $\mathcal{L}(R_0) = U_0$.

(b) Montrer que R est la solution de (P) sur $\mathbb{R}$.

PARTIE IV : INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

Le but de cette partie est de montrer que $\mathcal{L}$ est injective.

On se donne $f \in E$ et on considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par

$$g(t) = \int_0^t f(s) e^{-s} ds.$$

1. Justifier que $g(t)$ possède une limite finie L lorsque $t \rightarrow +\infty$.

2. En déduire que $g \in E$. *Indication* : on pourra utiliser I 2 (b).

3. (a) Montrer que $g' \in E$ et déduire de II 3 (a) que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(x+1)t} dt.$$

(b) Soit φ l'application définie sur $[0, 1]$ par

$$\varphi(u) = \begin{cases} g(-\ln u) & \text{pour } u \in]0, 1] \\ L & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

(i) Vérifier que φ est continue sur $[0, 1]$.

(ii) Après avoir énoncé le théorème de changement de variable, montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt = \int_0^1 u^{x-1} \varphi(u) du.$$

On suppose désormais que $\mathcal{L}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

4. Vérifier que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\int_0^1 u^n \varphi(u) du = 0.$$

5. (a)* Soit $p \in \mathbb{N}$. Donner le développement en série entière au voisinage de l'origine de la fonction $u \mapsto \cos(p\pi u)$.

(b)* En déduire que $\int_0^1 \cos(p\pi u) \varphi(u) du = 0$ pour tout entier p en citant avec précision le théorème utilisé.

(c) Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction paire, périodique et de période 2 définie par $\psi(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in [0, 1]$.

(i) Vérifier que ψ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii)** Calculer ses coefficients de Fourier sous forme trigonométrique et en déduire, en citant le théorème utilisé, que ψ est nulle sur $\mathbb{R}$.

6. (a) Montrer que f est la fonction nulle.

(b) Montrer que $\mathcal{L}$ est injective.