Dix-huitième devoir à la maison

[CCP13]
Durée : 4 heures
Les calculatrices sont autorisées.

N.B. : Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

AVERTISSEMENT. Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.

Notations

On note :

- $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.
- $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ l'intervalle $[0, +\infty[$.

Pour tout entier naturel n on note $n!$ la factorielle de n avec la convention $0! = 1$.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'expliciter la valeur d'une fonction (notée ψ) définie par une intégrale.

Dans la **partie I**, on étudie une fonction f et l'on propose un procédé de calcul de la limite de f en $+\infty$. La **partie II** est consacrée à l'étude de deux fonctions (notées h et φ) qui seront utilisées dans la **partie III**.

Partie I
Étude d'une fonction et de sa limite

I.1. Étude de la fonction f.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

I.1.1. Montrer que f est une fonction impaire dérivable sur $\mathbb{R}$.

I.1.2. Montrer que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f . Montrer qu'il existe une fonction polynôme p_n, dont on précisera le degré, telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = p_n(x)\exp(-x^2).$$

I.1.3. Que peut-on dire de la parité de p_n ?

I.1.4. Démontrer que f admet une limite finie en $+\infty$ (on ne demande pas de calculer cette limite). Dans toute la suite du problème, on note Δ cette limite.

I.2. Développpement en série de f.

I.2.1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!\,(2n+1)}.$$

I.2.2. Expliciter $p_n(0)$.

I.3. Calcul de Δ.

Pour tout entier n, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,\mathrm{d}x.$$

I.3.1. Montrer que pour tout réel u, on a

$$e^u \geqslant 1 + u.$$

I.3.2. Soit n un entier naturel non nul. Montrer que :

$$\begin{cases} (1-u)^n \leqslant e^{-nu} & \text{si } u \leqslant 1 \\ e^{-nu} \leqslant \dfrac{1}{(1+u)^n} & \text{si } u > -1. \end{cases}$$

I.3.3. Démontrer que pour tout entier n non nul, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

I.3.4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$W_{2n+1} \leqslant \frac{\Delta}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}.$$

En admettant que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, calculer Δ.

Partie II
Étude de deux fonctions

II.1. Étude de la fonction h.

II.1.1. Justifier l'existence, pour tout réel b, de l'intégrale :

$$h(b) = \int_0^{+\infty} \cos(2bt)\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

NDLR. Ici, l'énoncé original propose trois questions portant sur les formes différentielles, lesquelles ne sont plus au programme. À titre de défi, je maintiens la dernière question (évidemment renumérotée).

II.1.2. Déterminer $h(b)$ en fonction de b et Δ.

II.2. Étude de la fonction φ.

II.2.1. Montrer que l'on définit une fonction φ paire et continue sur $\mathbb{R}$ en posant :

$$\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

II.2.2. Montrer que φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

II.2.3. Déterminer une constante α telle que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on ait :

$$\varphi'(x) = \alpha\, \varphi(x).$$

II.2.4. Expliciter $\varphi(x)$ pour $x \in]0, +\infty[$, puis pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie III
Calcul d'une intégrale

III.1. Étude de la fonction ψ.

III.1.1. Vérifier que l'on définit une fonction ψ, continue sur $\mathbb{R}$, paire en posant :

$$\psi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\,x\,t)}{1+t^2} \mathrm{d}t.$$

III.1.2. Calculer $\psi(0)$.

III.2.* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et j_p la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$j_p(x) = \int_0^p y \exp(-(1+x^2)\, y^2) \,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $(j_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}$.

Expliciter sa limite.

III.3.* Désormais, a désigne un réel. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k_n fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$k_n(y) = \int_0^n y \exp(-y^2\, x^2) \cos(2\,a\,x) \,\mathrm{d}x.$$

Montrer que $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues qui converge simplement sur $\mathbb{R}^+$.

Expliciter sa limite.

III.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$, soit

$$u_{n,p} = \int_0^n j_p(x) \cos(2\,a\,x) \,\mathrm{d}x.$$

III.4.1.* Justifier l'existence de $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n,p}$ et l'expliciter sous forme d'une intégrale.

III.4.2.* Montrer que

$$u_{n,p} = \int_0^p k_n(y) \exp(-y^2) \,\mathrm{d}y.$$

III.5. Justifier l'intégrabilité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $y \mapsto k_n(y) \exp(-y^2)$.

III.6.* Calculer $\psi(x)$.

Fin de l'énoncé