Corrigé du dix-huitième devoir à la maison

NOTATION. Dans tout le corrigé, notons

$$\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto e^{-x^2}.$$

I.1.1. La fonction ε est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle y admet des primitives. La seule qui s'annule en 0 est f, qui est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, comme ε est paire et que $f(0) = 0$, f est impaire.

f est bien impaire et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

I.1.2. La fonction ε est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, comme composée de fonctions qui le sont. Comme primitive d'ε, f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Procédons par récurrence. D'une part, en posant $p_1 = 1$, $f' = \varepsilon = p_1\,\varepsilon$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe une fonction polynomiale p_n telle que $f^{(n)} = p_n\,\varepsilon$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \big(p_n'(x) - 2\,x\,p_n(x)\big)\,e^{-x^2}. \\ &= p_{n+1}(x)\,\varepsilon(x) \end{aligned}$$

en posant $p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2\,x\,p_n(x)$ qui est bien polynomiale de degré $\deg(p_{n+1}) = \deg(p_n) + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction polynomiale p_n de degré n telle que $f^{(n)} = p_n\,\varepsilon$. On a $p_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$p_{n+1}(x) = p_n'(x) - 2\,x\,p_n(x).$$

I.1.3. Avec cette relation, si p_n est paire, p_n' est impaire donc p_{n+1} l'est aussi ; et si p_n est impaire, p_{n+1} est paire. Comme p_1 est impaire,

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, p_n a la parité de $n-1$.

I.1.4. Pour $t \geqslant 1$, $\varepsilon(t) \leqslant e^{-t}$, où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc ε l'est aussi. Cela signifie que comme primitive d'une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$,

f admet une limite finie en $+\infty$.

I.2.1. On sait que pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$e^u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!},$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varepsilon(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-t^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{t^{2n}}{n!}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons K le segment $[0, x]$ ou $[x, 0]$, selon le signe de x. Pour tout $t \in K$, $|t| \leqslant |x|$ donc $t^2 \leqslant x^2$. Il s'ensuit que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|(-1)^n\,\frac{t^{2n}}{n!}\right| = \frac{t^{2n}}{n!} \leqslant \frac{x^{2n}}{n!}.$$

Or la série numérique $\sum x^{2n}/n!$ converge et ne dépend pas de t, donc la série de fonctions $\sum(t \mapsto (-1)^n\,t^{2n}/n!)$ converge normalement donc uniformément sur le segment K donc on peut intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^x \varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{t^{2n}}{n!}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{x^{2n+1}}{2n+1}. \end{aligned}$$

VARIANTE. L'écriture

$$\varepsilon(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,\frac{t^{2n}}{n!},$$

est un développement en série entière de rayon de convergence $+\infty$. Alors, comme primitive d'ε, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et son développement s'obtient en intégrant celui de ε terme à terme. On retrouve le résultat précédent.

I.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question I.1.2, $p_n(0) = f^{(n)}(0)$. Une preuve fastidieuse mais sans difficulté permet d'affirmer que l'on peut dériver la série précédente terme à terme.

Commentaire. Bien-sûr, on reconnait maintenant un développement en série entière, donc il n'est même pas nécessaire de faire une preuve.

Alors, pour $k \in \mathbb{N}$, $p_{2k}(0) = f^{(2k)}(0) = 0$, et

$$\begin{aligned} p_{2k+1}(0) &= f^{(2k+1)}(0) \\ &= \frac{(-1)^k}{k!\,(2\,k+1)}\,(2\,k+1)! = (-1)^k\,\frac{(2\,k)!}{k!} \end{aligned}$$

I.3.1. La fonction $g : u \mapsto e^u - 1 - u$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $g'(u) = e^u - 1 = e^u - e^0$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Par croissance de l'exponentielle, g' est du signe de u donc g décroit sur $\mathbb{R}_-$ et croît sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g(0) = 0$, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $g(u) \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout $u \in \mathbb{R}$, $e^u \geqslant 1 + u$.

I.3.2. Donc si $u > -1$, $e^u \geqslant 1 + u > 0$, et en élevant à la puissance $-n$, $e^{-nu} \leqslant (1+u)^{-n}$.

De même, si $u \leqslant 1$, $e^{-u} \geqslant 1 - u \geqslant 0$, et en élevant à la puissance n, $e^{-nu} \geqslant (1-u)^n$.

I.3.3. Si $x \in [0, 1]$, $x^2 \in [0, 1]$, donc $(1-x^2)^n \leqslant e^{-nx^2}$. En intégrant sur $[0, 1]$,

$$\int_0^1 (1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x,$$

ce qui est permis car $n \geqslant 1$, donc $e^{-nx^2} \leqslant e^{-x^2} = \varepsilon(x)$ et l'on a vu que ε est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

De même, si $x \in [0, +\infty[$, $x^2 > -1$ (si !) donc

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n},$$

ce qui est aussi permis puisque $(1+x^2)^{-n} \leqslant (1+x^2)^{-1}$ et $x \mapsto (1+x^2)^{-1}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ comme dérivée d'Arctan qui est bornée sur $[0, +\infty[$.

I.3.4. Dans l'intégrale de gauche, posons $x = \sin\theta$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int_0^1 (1-x^2)^n \,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2\theta)^n \cos\theta \,\mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}\theta \,\mathrm{d}\theta = W_{2n+1}.$$

Dans l'intégrale de droite, posons $x = \tan\theta$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$: ce changement de variable est licite car la fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective de $[0, \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}_+$. Alors, puisque l'intégrale de départ converge, la seconde aussi et l'on peut écrire :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^n} \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \frac{(1+\tan^2\theta)\,\mathrm{d}\theta}{(1+\tan^2\theta)^n}$$
$$= \int_0^{\pi/2} \cos^{2(n-1)}\theta \,\mathrm{d}\theta = W_{2n-2}.$$

Enfin, dans l'intégrale du milieu, posons $y = \sqrt{n}\,x$, de sorte que $y^2 = n x^2$, ce qui là encore est un changement de variable permis. On a

$$\int_0^{+\infty} e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{n}} = \frac{\mathit{\Delta}}{\sqrt{n}}.$$

Finalement, l'encadrement de la question I.3.3. se traduit en

$$\boxed{W_{2n+1} \leqslant \frac{\mathit{\Delta}}{\sqrt{n}} \leqslant W_{2n-2}.}$$

En admettant l'équivalent de l'énoncé, pour n grand, sachant que $2n+1 \sim 2n$ et $2n-2 \sim 2n$,

$$W_{2n+1} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n+1)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$
$$W_{2n-2} \sim \sqrt{\frac{\pi}{2\,(2n-2)}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$

donc par encadrement,

$$\frac{\mathit{\Delta}}{\sqrt{n}} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

$\boxed{\text{d'où } \mathit{\Delta} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.}$

II.1.1. Pour tout $b \in \mathbb{R}$, la fonction

$$\eta : t \mapsto \cos(2bt)\,e^{-t^2}$$

est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $|\eta| \leqslant \varepsilon$.

$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } b \in \mathbb{R},\ h(b) \text{ est bien défini.}}$

II.1.2. Voici une méthode non conforme au sujet original, mais très inspirée de la question suivante qui calcule φ.

La fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet, en notant

$$\kappa : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ (b,t) \mapsto \cos(2bt)\,e^{-t^2},$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \kappa(b,t) = \eta(t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$; pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $b \mapsto \kappa(b,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, par opérations usuelles, et pour tout $(b,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$\frac{\partial \kappa}{\partial b}(b,t) = -2t\sin(2bt)\,e^{-t^2} ;$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial \kappa}{\partial b}(b,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; et enfin, pour tout $(b,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$\left|\frac{\partial \kappa}{\partial b}(b,t)\right| \leqslant 2t\,e^{-t^2},$$

où $t \mapsto 2t\,e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, car l'on reconnait la dérivée de la fonction bornée $-\varepsilon$. Alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial \kappa}{\partial b}(b,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme annoncé.

De plus, pour tout $b \in \mathbb{R}$,

$$h'(b) = -2\int_0^{+\infty} t\sin(2bt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En faisant une intégration par parties, licite car tous les termes manipulés ont un sens,

$$h'(b) = \int_0^{+\infty} \sin(2bt)\,(-2t\,e^{-t^2})\,\mathrm{d}t$$
$$= \Big[\sin(2bt)\,e^{-t^2}\Big]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2b\cos(2bt)\,e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= -2b\,h(b).$$

Alors, $h(b) = h(0)\,e^{-b^2}$, ou encore $\boxed{h = \mathit{\Delta}\varepsilon.}$

II.2.1. En notant

$$\omega : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+,\ (x,t) \mapsto \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \omega(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \omega(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$,

$$|\omega(x,t)| \leqslant \exp(-t^2) = \varepsilon(t),$$

donc ω vérifie bien l'hypothèse de domination.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \omega(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\boxed{\varphi \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$

$\boxed{\text{Clairement, } \varphi \text{ est paire.}}$

II.2.2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto \omega(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

$$\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t) = -\frac{2x}{t^2}\,\omega(x,t) ;$$

pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \omega(x,t)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après la question précédente ; pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Terminons par une domination locale. Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, avec $0 < a < b$. Pour tout $x \in [a,b]$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \frac{2b}{t^2}\,\omega(a,t).$$

D'une part, si $t \geqslant 1$, $\omega(a,t)/t^2 \leqslant \omega(a,t)$, et comme $t \mapsto \omega(a,t)$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, $t \mapsto \omega(a,t)/t^2$ l'est aussi. D'autre part, si $t \leqslant 1$,

$$\frac{1}{t^2}\exp\left(-t^2 - \frac{a^2}{t^2}\right) \underset{t \to 0^+}{\sim} \frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right).$$

En posant $u = 1/t^2$, quand $t \to 0^+$, $u \to +\infty$, et

$$\frac{1}{t^2} \exp\left(-\frac{a^2}{t^2}\right) = u\, e^{-a^2 u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0,$$

donc $t \mapsto \omega(a,t)/t^2$ se prolonge par continuité en 0, et est donc intégrable sur $]0,1]$. Ainsi, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$; φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$; et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial \omega}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t \\ &= -2\,x \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} \exp\left(-t^2 - \frac{x^2}{t^2}\right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

II.2.3. Soit $x > 0$. Posons $u = x/t$. Ce changement de variable est de classe $\mathscr{C}^1$ et bijectif de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même, donc il permet d'écrire

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= -2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, e^{-x^2/t^2} \left|-\frac{x}{t^2}\right| \mathrm{d}t \\ &= -2 \int_0^{+\infty} e^{-x^2/u^2}\, e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = -2\,\varphi(x).\end{aligned}$$

II.2.4. Ainsi, il existe $\lambda > 0$ tel que pour $x > 0$, $\varphi(x) = \lambda\, e^{-2x}$. Comme φ est continue en 0, $\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0) = \lambda$, donc

pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \varDelta\, e^{-2x}$.

Et comme φ est paire,

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varDelta\, e^{-2|x|}$.

III.1.1. En notant

$$\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \frac{\cos(2\,x\,t)}{1+t^2},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \alpha(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \alpha(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$; pour tout $(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$|\alpha(x,t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$$

où $t \mapsto 1/(1+t^2)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$, comme dérivée d'Arctangente qui est bornée.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \alpha(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et ψ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Comme le cosinus est pair, ψ est paire.

III.1.2. On a

$$\psi(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

III.2.* Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. On a

$$j_p(x) = \left[-\frac{e^{-(1+x^2)\,y^2}}{2\,(1+x^2)}\right]_{y=0}^{p} = \frac{1 - e^{-(1+x^2)\,p^2}}{2\,(1+x^2)},$$

où l'on voit que j_p est continue sur $\mathbb{R}$, par opérations usuelles. En outre,

$$\lim_{p\to+\infty} j_p(x) = \frac{1}{2\,(1+x^2)}.$$

La suite (j_p) de fonctions continues converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers $\gamma : x \mapsto 1/(2\,(1+x^2))$.

III.3.* En notant

$$\beta : \mathbb{R}_+ \times [0,n] \to \mathbb{R},\ (y,x) \mapsto y\, e^{-y^2 x^2} \cos(2\,a\,x),$$

pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \beta(y,x)$ est continue sur $[0,n]$; pour tout $x \in [0,n]$, $y \mapsto \beta(y,x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$; pour tout $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$, tout $y \in [a,b]$ et tout $x \in [0,n]$,

$$|\beta(y,x)| = |y|\, e^{-y^2 x^2}\, |\cos(2\,a\,x)| \leqslant |b|,$$

où $x \mapsto |b|$ est continue et intégrable sur $[0,n]$.

Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \beta(y,x)$ est intégrable sur $[0,n]$; et k_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

On a $k_n(0) = 0$, donc la suite $(k_n(0))$ converge. Soit maintenant $y \in \mathbb{R}_+^*$. Le changement de variable $t = y\,x$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ donc valide sur le segment $[0,n]$. Alors

$$\begin{aligned}k_n(y) &= \int_0^{ny} e^{-t^2} \cos\left(2\,\frac{a}{y}\,t\right) \mathrm{d}t \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(2\,\frac{a}{y}\,t\right) \mathrm{d}t = h\left(\frac{a}{y}\right),\end{aligned}$$

ce qui est permis d'après la question II.1.1.

Ainsi, la suite (k_n) de fonctions continues converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers

$$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0, \\ h\left(\dfrac{a}{y}\right) & \text{si } y > 0. \end{cases}$$

III.4.1.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Utilisons le théorème de convergence dominée.

D'après la question III.2, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto j_p(x) \cos(2\,a\,x)\,\mathrm{d}x$ est continue sur $[0,n]$ et la suite de fonctions (j_p) converge simplement sur $[0,n]$ vers γ qui est bien-sûr continue sur $[0,n]$; pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n]$,

$$|j_p(x) \cos(2\,a\,x)| = \frac{1 - e^{-(1+x^2)\,p^2}}{2\,(1+x^2)}\, |\cos(2\,a\,x)| \leqslant \gamma(x)$$

où γ constitue une domination valide (*cf.* III.1.1).

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $x \mapsto j_p(x) \cos(2ax)$ est intégrable sur $[0,n]$; γ est aussi intégrable sur $[0,n]$, ce que l'on a déjà utilisé ci-dessus ; et l'on peut permuter la limite et l'intégrale :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} &= \int_0^n \lim_{p\to+\infty} j_p(x) \cos(2\,a\,x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^n \frac{\cos(2\,a\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

III.4.2.* On a

$$\begin{aligned}
\underline{u_{n,p}} &= \int_0^n \left(\int_0^p y\,e^{-(1+x^2)y^2}\,\mathrm{d}y\right)\cos(2\,a\,x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^n \left(\int_0^p y\,e^{-y^2}\,e^{-x^2y^2}\cos(2\,a\,x)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^p \left(\int_0^n y\,e^{-y^2}\,e^{-x^2y^2}\cos(2\,a\,x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^p \left(\int_0^n y\,e^{-x^2y^2}\cos(2\,a\,x)\,\mathrm{d}x\right)e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \underline{\int_0^p k_n(y)\,e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \int_0^p k_n(y)\,\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y.}
\end{aligned}$$

Commentaire. La justification de ce calcul, c'est-à-dire surtout la permutation des deux intégrales, est due au théorème de Fubini, qui n'est plus au programme (soupir).

III.5. D'après la question III.3, $k_n\,\varepsilon$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Et d'après la question I.1.4, ε est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour conclure, il suffit donc de majorer k_n par une constante. Comme à la question III.3, en posant $t = x\,y$ pour $y > 0$,

$$\begin{aligned}
|k_n(y)| &\leqslant \int_0^n y\,e^{-x^2y^2}\,|\cos(2\,a\,x)|\,\mathrm{d}x \\
&\leqslant \int_0^n y\,e^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{n/y} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&\leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathit{\Delta}.
\end{aligned}$$

<u>Ainsi, $k_n\,\varepsilon$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.</u>

III.6.* Cela entraine que

$$\lim_{p\to+\infty} u_{n,p} = \int_0^{+\infty} k_n(y)\,\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y,$$

donc que

$$\frac{1}{2}\int_0^n \frac{\cos(2\,a\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} k_n(y)\,\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y.$$

Passons à la limite sur n. D'une part, d'après la question III.1.1,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \frac{\cos(2\,a\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\,a\,x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \psi(a).$$

D'autre part, on aimerait dire que

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} k_n(y)\,\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} k_n(y)\,\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} h\left(\frac{a}{y}\right)\varepsilon(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \mathit{\Delta}\int_0^{+\infty} e^{-a^2/y^2}\,e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \mathit{\Delta}\,\varphi(a) = \mathit{\Delta}^2\,e^{-2|a|}.
\end{aligned}$$

La fin de ce calcul ne pose pas de difficulté. Justifions la première permutation. Pour éviter d'inutiles complications en 0, plaçons-nous sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après la question III.3, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k_n\,\varepsilon$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et la suite de fonctions $(k_n\,\varepsilon)$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction

$$y \mapsto h\left(\frac{a}{y}\right)\varepsilon(y),$$

laquelle est bien continue sur $\mathbb{R}_+^*$, comme composée de fonctions qui le sont (*cf.* II.1.2) ; enfin, d'après la question III.5, k_n est majorée par une constante indépendante de n, donc $k_n\,\varepsilon$ vérifie l'hypothèse de domination requise.

Alors le théorème de convergence dominée s'applique et valide la permutation voulue.

<u>Finalement, $\psi(a) = 2\,\mathit{\Delta}^2\,e^{-2|a|} = \frac{\pi}{2}\,e^{-2|a|}$.</u>