

Corrigé du dix-neuvième devoir à la maison

1. La fonction $\alpha : t \mapsto \ln(1+t) - t$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] -1, +\infty[$. De plus, pour tout $t > -1$,

$$\alpha'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t},$$

donc $\alpha'(t) > 0$ sur $] -1, 0[$ et $\alpha'(t) < 0$ sur $] 0, +\infty[$, donc α croît strictement sur $] -1, 0[$ puis décroît strictement sur $] 0, +\infty[$. Comme $\alpha(0) = 0$, α est constamment négative, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall t \in] -1, +\infty[, \ln(1+t) \leq t.}$$

De même, la fonction $\beta : t \mapsto t \ln(t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $] 0, +\infty[$; pour tout $t > 0$, $\beta'(t) = \ln(t) + 1$; pour tout $t \in] 0, \frac{1}{e}[$, $\beta'(t) < 0$ donc β décroît strictement sur $] 0, \frac{1}{e}[$; pour tout $t \in] \frac{1}{e}, +\infty[$, $\beta'(t) > 0$ donc β croît strictement sur $] \frac{1}{e}, +\infty[$; comme $\beta(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$,

$$\boxed{\forall t \in] 0, +\infty[, t \ln(t) \geq -\frac{1}{e}.}$$

2. D'après le cours, une telle condition est que

$$\boxed{\psi' \text{ ne s'annule pas sur } I.}$$

Dans ce cas,
$$\left(\psi^{-1} \right)' = \frac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}.$$

II. Pour alléger les écritures, posons $\delta = \frac{1}{2}$. Dans tout le problème, adoptons des notations fonctionnelles. En particulier, considérons les fonctions

$$j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto u, \quad j^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto u^2, \\ m = \exp \circ (-\delta j^2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, u \mapsto e^{-u^2/2},$$

et confondons abusivement $c \in \mathbb{R}$ et la fonction $u \mapsto c$.

La fonction m est positive et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . Sa parité permet de n'étudier son intégrabilité que sur \mathbb{R}_+ . Comme $m(u) \ll_{+\infty} e^{-u}$ et que $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , la fonction m est intégrable sur \mathbb{R} .

Pour alléger, notons $\int_{\mathbb{R}} m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} du$.

Soit $f \in H$. Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(u)m(u) \leq e^{-\rho u^2}/\rho$. La fonction $u \mapsto e^{-\rho u^2}$ est continue, positive et, par une démarche analogue à ci-dessus, intégrable sur \mathbb{R} , donc $f m$ aussi. Il est donc licite de parler de H_0 .

3. On vient de montrer que $f m$ est intégrable sur \mathbb{R} , donc en particulier sur $] -\infty, x]$ pour tout x réel. Ainsi, F_f est bien définie.

En outre, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_f(x) = \int_{-\infty}^0 f m + \int_0^x f m$ donc F_f est une primitive de $f m$. Alors elle est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et $(F_f)' = f m > 0$. Elle réalise une bijection de \mathbb{R} sur son image : d'après la question 2, c'est même est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme.

Comme $f m$ est intégrable sur \mathbb{R} et que $f \in H_0$,

$$\lim_{-\infty} F_f = \int_{-\infty}^0 f m + \int_0^{-\infty} f m = 0 \\ \text{et } \lim_{+\infty} F_f = \int_{\mathbb{R}} f m = \sqrt{2\pi}.$$

Finalment, F_f est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} sur $] 0, \sqrt{2\pi}[$.

4. Soit $M : x \mapsto \int_{-\infty}^x m$ la primitive de m nulle en $-\infty$. On cherche φ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f m = \int_{-\infty}^x m$, c'est-à-dire $F_f \circ \varphi = M$. Comme F_f est bijective,

$$\boxed{\varphi = (F_f)^{-1} \circ M \text{ est l'unique fonction qui convient.}}$$

5. M croît strictement sur \mathbb{R} , F_f aussi, donc $(F_f)^{-1}$ aussi. Alors, comme composée de fonctions strictement croissantes sur \mathbb{R} , φ croît strictement sur \mathbb{R} .

φ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} car M et $(F_f)^{-1}$ le sont. En passant, φ réalise une bijection de \mathbb{R} sur son image.

Enfin, par composition, $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $M(\mathbb{R}) =] 0, \sqrt{2\pi}[$ et $(F_f)^{-1}(] 0, \sqrt{2\pi}[) = \mathbb{R}$.

Ainsi, φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme strictement croissant de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

6. En dérivant $F_f \circ \varphi = M$, on a $\varphi' \cdot (F_f)' \circ \varphi = M'$. Or $M' = m$ et $(F_f)' = f m$ donc $\varphi' \cdot (f \cdot m) \circ \varphi = m$, c'est-à-dire $\varphi' \cdot f \circ \varphi \cdot m \circ \varphi = m$. Toutes ces fonctions sont strictement positives, donc en composant à gauche par \ln , on a

$$(*) \quad \boxed{\ln \circ \varphi' + \ln \circ f \circ \varphi - \delta \varphi^2 = -\delta j^2.}$$

En composant à droite par φ^{-1} , on a

$$\ln \circ \varphi' \circ \varphi^{-1} + \ln \circ f - \delta j^2 = -\delta (\varphi^{-1})^2.$$

Or $\varphi' \circ \varphi^{-1} = 1/(\varphi^{-1})'$ donc $\ln \circ \varphi' \circ \varphi^{-1} = -\ln \circ (\varphi^{-1})'$. Alors, en multipliant tout par -1 et en échangeant les deux derniers termes,

$$(**) \quad \boxed{\ln \circ (\varphi^{-1})' - \ln \circ f - \delta (\varphi^{-1})^2 = -\delta j^2.}$$

7. Puisque φ est un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , d'après le théorème du changement de variable, comme $h f m$ est intégrable sur \mathbb{R} , $h \circ \varphi \cdot f \circ \varphi \cdot m \circ \varphi \cdot |\varphi'|$ l'est aussi. Or en composant (*) par \exp à gauche, $\varphi' \cdot f \circ \varphi \cdot m \circ \varphi = m$.

$$\boxed{h \circ \varphi \cdot m \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } \int_{\mathbb{R}} h f m = \int_{\mathbb{R}} h \circ \varphi \cdot m.}$$

8. D'après la question 5, $\lim_{+\infty} \varphi = +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que pour $u \geq A$, $\varphi(u) \geq 0$.

Soit $x \geq A$. Sur $[x, x+1]$, m décroît, φ est positive et croît, donc φ^2 croît aussi, car $t \mapsto t^2$ croît sur \mathbb{R}_+ . Alors, pour tout $u \in [x, x+1]$, $\varphi^2(u) \geq \varphi^2(x)$ et $m(u) \geq m(x+1)$.

$$\boxed{\exists A > 0, \forall x \geq A, \int_x^{x+1} \varphi^2 m \geq \varphi^2(x) m(x+1).}$$

9. Appliquons la question 7 à la fonction j^2 . Sur \mathbb{R} , $0 < j^2 f m \leq j^2 \exp \circ (-\rho j^2)/\rho$, donc $j^2 f m$ est intégrable sur \mathbb{R} . Alors, $\varphi^2 m$ est intégrable sur \mathbb{R} . Il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \varphi^2 m = 0$. Alors, il existe $B_1 \geq A$ tel que pour $x \geq B_1$, $\varphi^2(x) m(x+1) \leq \int_x^{x+1} \varphi^2 m \leq 1$, autrement dit,

$$|\varphi(x)| = \varphi(x) \leq \frac{1}{\sqrt{m(x+1)}} \\ = e^{(x+1)^2/4} = e^{(|x+1|)^2/4}.$$

Regardons maintenant ce qui se passe quand x est très négatif et raisonnons comme dans la question 8.

On sait que $\lim_{-\infty} \varphi = -\infty$ donc il existe $A' < 0$ tel que pour $u \leq A'$, $\varphi(u) \leq 0$.

Soit x tel que $x + 1 \leq A'$. Sur $[x, x + 1]$, m croît, φ est négative et croît donc φ^2 décroît, car $t \mapsto t^2$ décroît sur \mathbb{R}_- . Alors, pour tout $u \in [x, x + 1]$, $\varphi^2(u) \geq \varphi^2(x + 1)$ et $m(u) \geq m(x)$. Alors $\int_x^{x+1} \varphi^2 m \geq \varphi^2(x + 1)m(x)$. Comme $\varphi^2 m$ est intégrable sur \mathbb{R} , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_x^{x+1} \varphi^2 m = 0$. Alors, il existe $B_2 \leq A' - 1 < 0$ tel que pour tout $x \leq B_2$, $\varphi^2(x + 1)m(x) \leq \int_x^{x+1} \varphi^2 m \leq 1$, donc

$$|\varphi(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{m(x-1)}} = e^{(x-1)^2/4} = e^{(|x+1|^2)/4}.$$

En posant $B = \max(B_1, -B_2)$, dès que $|u| \geq B$, si $u \geq 0$, $u \geq B_1$ et si $u \leq 0$, $u \leq B_2$ donc les deux majorations de $|\varphi(u)|$ sont valides.

$$\boxed{\exists B > 0, \forall |u| \geq B, |\varphi(u)| \leq e^{(|u+1|^2)/4}.$$

10. La fonction $g = (j\varphi - j^2 - \varphi' + 1)m$ est continue sur \mathbb{R} , donc elle y admet des primitives. En outre, $m' = -jm$ donc si k est une fonction dérivable sur \mathbb{R} , $(km)' = (k' - jk)m$. Alors, comme $j' = 1$, on écrit

$$g = (j' - \varphi' - j(j - \varphi))m = ((j - \varphi)m)'$$

$$\boxed{\text{Une primitive de } g \text{ est la fonction } G = (j - \varphi)m.$$

11. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\int_0^a g = G(a) - G(0)$. On sait que $\lim_{\pm\infty} jm = 0$. En outre, d'après la question 9, pour $u \geq B$,

$$\begin{aligned} |\varphi(u)|m(u) &\leq \exp(\delta^2(|u| + 1)^2 - \delta u^2) \\ &= \exp(\delta^2(-u^2 + 2|u| + 1)), \end{aligned}$$

donc $\lim_{\pm\infty} \varphi m = 0$. Ainsi, $\lim_{\pm\infty} G = 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a g = -G(0)$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 g = G(0)$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } I = \int_{\mathbb{R}} g \text{ converge et vaut } 0.$$

Commentaire. On a prouvé la convergence de I , et non l'intégrabilité de g sur \mathbb{R} . Mais vue la tournure de l'énoncé, on s'en contente.

12. La fonction $f \cdot \ln \circ f \cdot m$ est définie et continue sur \mathbb{R} car $f > 0$. Soit $u \in \mathbb{R}$. D'après les inégalités (2) et (A)

$$\begin{aligned} -\frac{1}{e} &\leq f(u) \ln(f(u)) \\ &\leq \frac{1}{\rho} \exp((\delta - \rho)u^2)((\delta - \rho)u^2 - \ln \rho). \end{aligned}$$

Pour des réels $a \leq b \leq c$, $|b| \leq \max(|a|, |c|) \leq |a| + |c|$, donc

$$\begin{aligned} f(u) |\ln(f(u))| \\ \leq \frac{1}{e} + \frac{1}{\rho} \exp((\delta - \rho)u^2)(|\delta - \rho|u^2 + |\ln \rho|). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(u) |\ln(f(u))| e^{-u^2/2} \\ \leq e^{-u^2/2-1} + \frac{1}{\rho} e^{-\rho u^2} (|\delta - \rho|u^2 + |\ln \rho|) \\ = \mathcal{O}_{|u| \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{u^2} \right). \end{aligned}$$

$$\boxed{f \cdot \ln \circ f \cdot m \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } E(f) \text{ existe.}$$

Prouvons que $(j - \varphi)^2 m$ est intégrable sur \mathbb{R} . Elle y est continue. En outre, $0 \leq (j - \varphi)^2 m \leq 2(j^2 + \varphi^2)m$. Or, $j^2 m$ est clairement intégrable sur \mathbb{R} , et d'après la question 9, $\varphi^2 m$ aussi.

$$\boxed{(j - \varphi)^2 m \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et } \Phi(f) \text{ existe.}$$

13. Appliquons la question 7 à la fonction $h = \ln \circ f$:

$$\boxed{\begin{aligned} \ln \circ f \circ \varphi \cdot m \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ et} \\ E(f) = \int_{\mathbb{R}} \ln \circ f \cdot f \cdot m = \int_{\mathbb{R}} \ln \circ f \circ \varphi \cdot m. \end{aligned}}$$

14. Alors

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} (\ln \circ f \circ \varphi - \delta j^2 + j\varphi - \delta \varphi^2)m.$$

D'après (*), $\ln \circ f \circ \varphi - \delta \varphi^2 = -\ln \circ \varphi' - \delta j^2$.

En retranchant $I = 0$ (voir la question 11), on a

$$\begin{aligned} E(f) - \Phi(f) - I &= \int_{\mathbb{R}} (-\ln \circ \varphi' - j^2 + j\varphi \\ &\quad - j\varphi + j^2 + \varphi' - 1)m. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } E(f) - \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi' - 1 - \ln \circ \varphi')m.$$

15. D'après l'inégalité (1) de la question 1, pour tout $t > 0$, $t - 1 \geq \ln(t)$, donc $\varphi' - 1 - \ln \circ \varphi' \geq 0$. Alors $E(f) - \Phi(f) \geq 0$ et $\Phi(f) \leq E(f)$.

16. Soit f une fonction telle que $E(f) = \Phi(f)$. Comme $\varphi' - 1 - \ln \circ \varphi'$ est positive et continue sur \mathbb{R} et que son intégrale est nulle, elle est nulle. Mais d'après l'étude menée à la question 1, le seul réel t tel que $t - 1 = \ln(t)$ est $t = 1$, donc $\varphi' = 1$, donc $\varphi = j + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Du coup, $\varphi^{-1} = j - c$ et d'après (**),

$$\begin{aligned} \ln \circ f &= \ln \circ (\varphi^{-1})' - \delta (\varphi^{-1})^2 + \delta j^2 \\ &= \ln 1 - \delta (j - c)^2 + \delta j^2 = cj - \delta c^2 \end{aligned}$$

et $f = \exp \circ (cj - \delta c^2)$.

Montrons qu'une telle fonction est bien dans H_0 . Soit $\rho > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \rho \exp(cx - \delta c^2) \exp(-(\delta - \rho)x^2) \\ = \rho \exp\left(-(\delta - \rho)\left(x - \frac{c}{1 - 2\rho}\right)^2 + \frac{\rho c^2}{1 - 2\rho}\right). \end{aligned}$$

On voudrait borner cette expression par 1. Il est déjà nécessaire de choisir $\rho < \delta$. Alors, elle est majorée par $\rho \exp(\rho c^2 / (1 - 2\rho))$. Ce majorant tend vers 0 quand ρ tend vers 0 : il peut donc être inférieur à 1, en choisissant ρ suffisamment petit. Dans ce cas, $f \in H$. Enfin, en posant $v = u - c$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{cu - \delta c^2} e^{-\delta u^2} du &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta(u-c)^2} du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta v^2} dv \end{aligned}$$

et $f \in H_0$.

Réciproquement, soit $c \in \mathbb{R}$ et $f = \exp \circ (cj - \delta c^2)$ qui est dans H_0 . Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_f(x) &= \int_{-\infty}^x \exp \circ (-\delta(j - c)^2) \\ &= \int_{-\infty}^{x-c} \exp \circ (-\delta j^2) = M(x - c), \end{aligned}$$

donc $\varphi^{-1} = j - c$ et $\varphi = j + c$. Du coup, $E(f) = \Phi(f)$.

$$\boxed{\text{Finalement, } E(f) = \Phi(f) \text{ si et seulement si } f = \exp \circ (cj - \delta c^2) \text{ où } c \in \mathbb{R}.$$