# Deuxième devoir à la maison

[MP03]

Soit $I$ le segment d'extrémités 0 et 1 : $I = [0, 1]$ ; dans tout ce problème $h$ et $f$ sont des fonctions réelles données définies et continues sur la droite réelle $\mathbb{R}$. Soit (**E**) l'équation différentielle suivante :

(**E**) $$-y''(x) + h(x)\,y(x) = f(x),$$

où la fonction $y$ est une fonction inconnue définie sur la droite réelle $\mathbb{R}$.

Le but de ce problème est d'étudier les solutions de cette équation différentielle (**E**) qui vérifient les conditions « aux limites » suivantes : la solution $y$ recherchée est nulle en chacune des extrémités 0 et 1 de l'intervalle $I$.

Les fonctions $h$ et $f$ étant des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$, soit (**S**) le système constitué de l'équation différentielle (**E**) et des équations exprimant la nullité de la solution $y$ aux extrémités 0 et 1 de l'intervalle $I$ :

(**S**) $$\begin{cases} -y''(x) + h(x)\,y(x) = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Une fonction $y$, définie sur $\mathbb{R}$, deux fois continument dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant les équations du système (**S**) est dite solution du système (**S**).

### La fonction $h$ est égale à une constante et la fonction $f$ est nulle :

**1.** Démontrer que, lorsque la fonction $h$, définie sur $\mathbb{R}$, est égale à une constante réelle $\alpha$ ($h(x) = \alpha \in \mathbb{R}$) et la fonction $f$ est nulle ($f(x) = 0$), la seule solution $y$ du système (**S**) est la fonction nulle ($y(x) = 0$ pour tout $x$), sauf pour certaines valeurs du réel $\alpha$ qui seront précisées ; poser $\alpha = \omega^2$ ou $\alpha = -\omega^2$ ($\omega > 0$), suivant que le réel $\alpha$ est strictement positif ou strictement négatif.

### Une expression de la solution du système (S) :

Un résultat préliminaire : soit $\varphi$ une fonction réelle définie et continue sur la droite réelle $\mathbb{R}$ ; soit $\Phi$ la fonction définie par la relation suivante : pour tout réel $x$,

$$\Phi(x) = (1-x)\int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (1-t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

**2.** Démontrer que la fonction $\Phi$ est définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$ ; déterminer sa dérivée seconde $\Phi''$ ainsi que les valeurs prises par la fonction $\Phi$ en 0 et en 1 : $\Phi(0)$, $\Phi(1)$.

**3.** Démontrer que, si $\Phi_1$ est une fonction réelle, deux fois dérivable sur la droite réelle $\mathbb{R}$, telle qu'elle vérifie les relations suivantes : pour tout réel $x$,

$$\Phi_1''(x) = -\varphi(x),\ \Phi_1(0) = 0,\ \Phi_1(1) = 0,$$

les fonctions $\Phi$ et $\Phi_1$ sont égales ($\Phi_1 = \Phi$).

**4.** En déduire, lorsque la fonction $h$ est nulle, l'existence et l'unicité d'une solution $y$ du système ($\mathbf{S}_0$) suivant :

($\mathbf{S}_0$) $$\begin{cases} -y''(x) = f(x), \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

### Une condition sur la fonction $h$ lorsque la fonction $f$ est nulle :

La fonction $f$ est supposée nulle ($f = 0$) ; le système (**S**) s'écrit,

($\mathbf{S}_1$) $$\begin{cases} -y''(x) + h(x)\,y(x) = 0, \\ y(0) = 0,\ y(1) = 0. \end{cases}$$

**5.** Démontrer que, pour qu'une fonction $y$, définie et continue sur la droite réelle $\mathbb{R}$, vérifie le système ($\mathbf{S}_1$), il faut et il suffit que la fonction $y$ vérifie, pour tout réel $x$, la relation (**R**) suivante :

(**R**) pour tout réel $x$,

$$y(x) = (x-1)\int_0^x t\,h(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (t-1)\,h(t)\,y(t)\,\mathrm{d}t.$$

**6.** Démontrer l'existence de deux réels $H$ et $Y$ respectivement maximums des valeurs absolues des fonctions $h$ et $y$ sur le segment $I = [0, 1]$.

**7.** Soit $y$ une solution du système ($\mathbf{S}_1$) ; démontrer, pour tout réel $x$ appartenant au segment $I$ ($0 \leqslant x \leqslant 1$), l'inégalité suivante :

$$|y(x)| \leqslant \frac{HY}{8}.$$

**8.** En déduire une condition nécessaire sur la fonction $h$, pour qu'il existe des solutions $y$, autres que la fonction nulle, du système ($\mathbf{S}_1$). Vérifier que, lorsque la fonction $h$ est constante, cette condition est remplie lorsqu'il y a des solutions différentes de 0.