Corrigé du deuxième devoir à la maison

1. Cas où $\alpha = \omega^2$, $\omega > 0$. L'ensemble des solutions sur I de $-y'' + \omega^2 y = 0$ est

$$\{x \mapsto \lambda \operatorname{ch}(\omega x) + \mu \operatorname{sh}(\omega x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Une fonction de cet ensemble vérifie $(\mathbf{S})$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $\lambda \operatorname{ch}(\omega) + \mu \operatorname{sh}(\omega) = 0$. Comme $\operatorname{sh}(\omega) > 0$, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

Cas où $\alpha = -\omega^2$, $\omega > 0$. L'ensemble des solutions sur I de $-y'' - \omega^2 y = 0$ est

$$\{x \mapsto \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Une fonction de cet ensemble vérifie $(\mathbf{S})$ si et seulement si $\lambda = 0$ et $\mu \sin(\omega) = 0$.

Si $\omega \notin \pi\mathbb{N}$, $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

Si $\omega = k\pi$ où $k \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des solutions de $(\mathbf{S})$ est $\{x \mapsto \mu \sin(k\pi x),\ \mu \in \mathbb{R}\}$.

Cas où $\alpha = 0$. L'ensemble des solutions de $-y'' = 0$ est $\{x \mapsto \lambda + \mu x,\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. Une fonction de cet ensemble vérifie $(\mathbf{S})$ si et seulement si $(\lambda, \mu) = (0, 0)$.

Ainsi, $(\mathbf{S})$ n'admet que la solution nulle, sauf si $\alpha = -k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas, l'ensemble des solutions de $(\mathbf{S})$ est la droite vectorielle engendrée par la fonction $x \mapsto \sin(k\pi x)$.

2. Les fonctions

$$A : x \mapsto \int_0^x t\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } B : x \mapsto \int_1^x (1-t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, comme primitives des fonctions continues $x \mapsto x\varphi(x)$ et $x \mapsto (1-x)\varphi(x)$. Alors Φ est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = (1-x)\,A(x) - x\,B(x).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= -A(x) + (1-x)\,A'(x) - B(x) - x\,B'(x)\\ &= -A(x) + (1-x)x\varphi(x) - B(x) - x(1-x)\varphi(x)\\ &= -A(x) - B(x).\end{aligned}$$

Alors Φ' est $\mathscr{C}^1$ donc Φ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned}\Phi''(x) &= -A'(x) - B'(x) = -x\,\varphi(x) - (1-x)\,\varphi(x)\\ &= -\varphi(x).\end{aligned}$$

Enfin, on voit que $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

3. Considérons une fonction Φ_1 comme annoncée et posons $\Phi_2 = \Phi - \Phi_1$. Alors $\Phi_2(0) = \Phi_2(1) = 0$ et $\Phi_2'' = 0$. D'après la question 1 (cas où $\alpha = 0$), $\Phi_2 = 0$, donc $\Phi_1 = \Phi$.

4. En appliquant la question 2 à la fonction $\varphi = f$, qui est bien continue sur $\mathbb{R}$, la fonction Φ associée est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\Phi'' = -f$ et $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$. D'après la question 3, c'est la seule.

$(\mathbf{S}_0)$ admet une unique solution.

5. En posant $f = -hy$, les systèmes $(\mathbf{S}_1)$ et $(\mathbf{S}_0)$ sont de même forme. D'après la question 4 et la construction de la question 2,

y est solution de $(\mathbf{S}_1)$ si et seulement si elle vérifie la propriété $(\mathbf{R})$.

6. Les fonctions h et y sont continues sur le segment I, donc elles sont bornées et atteignent leurs bornes :

$H = \max_I |h|$ et $Y = \max_I |y|$ existent.

7. De plus, pour tout $x \in I$, $|h(x)|\,|y(x)| \leqslant H\,Y$. D'après la relation $(\mathbf{R})$,

$$\begin{aligned}|y(x)| &\leqslant (1-x)\int_0^x t\,|h(t)|\,|y(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\qquad + x\int_x^1 (1-t)\,|h(t)|\,|y(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant (1-x)\int_0^x t\,H\,Y\,\mathrm{d}t + x\int_x^1 (1-t)\,H\,Y\,\mathrm{d}t\\ &= \tfrac{1}{2}\,x\,(1-x)\,H\,Y.\end{aligned}$$

Sur I, la fonction $x \mapsto x\,(1-x)$ atteint son maximum $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2}$. Donc $|y(x)| \leqslant \frac{1}{8}\,H\,Y$.

8. Supposons que $(\mathbf{S}_1)$ admette une solution y non nulle. Alors $Y \neq 0$. Soit $x_0 \in I$ tel que $|y(x_0)| = Y$: $Y \leqslant \frac{1}{8}\,H\,Y$ donc $1 \leqslant \frac{1}{8}H$ et $H \geqslant 8$.

Pour que $(\mathbf{S}_1)$ admette des solutions non nulles, il est nécessaire que $H \geqslant 8$.

Quand $h = \alpha$ est constante, $H = |\alpha|$. D'après la question 1, pour que $(\mathbf{S}_1)$ admette des solutions non nulles, on doit avoir $H = k^2\pi^2$ où $k \in \mathbb{N}^*$. La plus petite valeur possible est $H = \pi^2$. Comme $\pi > 3$, $\pi^2 > 9$, et la condition $H \geqslant 8$ est vérifiée.