Vingtième devoir à la maison

Transformation de Fourier

[CS16]

4 heures
Calculatrices autorisées
Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux

Ce problème aborde l'étude d'une transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier. Elle permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie I étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie III traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie IV étudie le cas particulier d'un signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie V pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon.

On note

— E_{cpm} le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;

— $\mathscr{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

I Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{\text{cpm}}$, on considère la fonction $\mathscr{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathscr{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi i t\xi}\, \mathrm{d}t.$$

I.A – On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathscr{F}(\varphi)$.

I.B – On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \text{ et } \psi(0) = 1.$$

I.B.1) Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \int_n^{n+1} |\psi(x)|\, \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{(n+1)\,\pi^2}.$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

I.C – Soit $f \in E_{\text{cpm}}$. Montrer que la fonction $\mathscr{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D – Soit $f \in \mathscr{S}$.

I.D.1) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Démontrer que la fonction $\mathscr{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \xi \in \mathbb{R},$$
$$(\mathscr{F}(f))^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\, e^{-2\pi i t\xi}\, \mathrm{d}t.$$

I.E – On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp(-\pi x^2)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1) Justifier que θ appartient à $\mathscr{S}$ et que $\mathscr{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ y'(\xi) = -2\pi\xi\, y(\xi).$$

I.E.2) Établir que $\mathscr{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\, \mathrm{d}x = 1$.

II Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathscr{S}$. On suppose que $\mathscr{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\, \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi,$$
$$J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathscr{F}(\theta)(t)\, \mathrm{d}t.$$

II.A* – Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\, \mathrm{d}\xi$.

II.B* – Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

II.C – Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2\pi i t\xi}\, \mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2\pi i t\xi}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\xi.$$

II.D – Démontrer que $f(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\, \mathrm{d}\xi$.

En déduire, en utilisant la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$, que

$$\text{(II.1)} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\, e^{2\pi i x\xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$.

II.E – Une application

Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i x\xi}}{1 + (2\pi\xi)^2}\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

III Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathscr{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation II.1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{F}(f)(\xi)\, e^{2\pi i x \xi}\, \mathrm{d}\xi.$$

III.A – Démontrer que $\mathscr{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathscr{F}(f) \in \mathscr{S}$. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

III.B – Prouver que

$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \int_{-1/2}^{1/2} (2\pi i \xi)^n \mathscr{F}(f)(\xi) e^{2\pi i x_0 \xi} \mathrm{d}\xi = f(x).$$

III.C* – On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

IV Cas des fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi i k x}.$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

— la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in \,]-1, 1[\, \setminus \{0\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)},$$

$$g(0) = \frac{f'(0)}{\pi},\ g(1) = g(-1) = -g(0).$$

— la suite de complexes $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\, e^{-2\pi i n x}\, \mathrm{d}x.$$

IV.A –

IV.A.1) Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[\, \setminus \{0\}$ et continue sur $]-1, 1[$.

IV.A.2) Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1, 1[$.

On admet dorénavant que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-1, 1]$.

IV.B – Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\, \mathrm{d}x$.

IV.C – Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \setminus \{0\},\ S_n(x) = \frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}.$$

IV.D – Justifier que

$\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, \mathrm{d}x.$$

IV.E – À l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x) \sin((2n+1)\pi x)\, \mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{C}{2n+1}.$$

IV.F – Soit $t \in [-1/2, 1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2, 1/2]$ par

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ G_t(x) = f'(x+t)\sin(\pi x) - (f(x+t) - f(t))\pi \cos(\pi x).$$

Établir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de t, tel que

$$\forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right], \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\ |G_t(x)| \leqslant D x^2.$$

IV.G – Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\text{(IV.1)} \qquad \forall t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],\quad \left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{2\pi i k t}\right| \leqslant \frac{E}{2n+1}.$$

On pourra introduire la fonction $h_t : x \mapsto f(x+t)$.

V Formule d'échantillonnage de Shannon

Soit $f \in \mathscr{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathscr{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. On pose

$$\text{(V.1)} \qquad \forall k \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R},\ \psi_k(x) = \psi(x+k)$$

où ψ est définie à la question I.B.

V.A – Justifier que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (\mathscr{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right) = (\mathscr{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

V.B – Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathscr{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2, 1/2]$. Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

V.C* – À l'aide de l'inégalité IV.1, prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\displaystyle\left(x \mapsto \sum_{k=-n}^{n} d_k\, e^{2\pi i k x}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathscr{F}(f)$ sur $[-1/2, 1/2]$.

V.D* – Démontrer que la suite de fonctions $\displaystyle\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k\, \psi_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera symboliquement $\displaystyle f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\, \psi_k$.

V.E* – Établir que $\forall j \in \mathbb{Z},\ f(-j) = d_j$.

L'égalité $\displaystyle f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\, \psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k \in \mathbb{Z}}$.