# Corrigé du vingtième devoir à la maison

**I.A.** La fonction $\varphi$ est clairement paire, donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}_+$.

Elle est continue sur $[0, \frac{1}{2}]$ et sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$. De plus, elle tend vers 0 en $\frac{1}{2}$ à droite. Donc elle est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

Elle est intégrable sur $[0, \frac{1}{2}]$ car elle y est continue, et sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$ car elle y est identiquement nulle. Donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\varphi \in E_{\text{cpm}}$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\mathscr{F}(\varphi)(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi t\xi}\, \mathrm{d}t = [-\frac{e^{-2i\pi t\xi}}{2i\pi\xi}]_{t=-1/2}^{1/2}$$
$$= \frac{e^{i\pi\xi} - e^{-i\pi\xi}}{2i\pi\xi} = \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}.$$

Bien-sûr, ce n'est possible que si $\xi \neq 0$. Par ailleurs,

$$\mathscr{F}(\varphi)(0) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathrm{d}t = 1.$$

**I.B.1.** Pour tout $x \neq 0$, grâce au développement en série entière du sinus, valable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\psi(x) = \frac{1}{\pi x} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\pi x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n}.$$

Et ces deux expressions sont encore égales en 0.

Ainsi, $\psi$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ comme somme d'une série entière.

**I.B.2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. En posant $x = n + u$, qui est un changement de variable licite car bijectif et $\mathscr{C}^1$, on a

$$\int_n^{n+1} |\psi(x)|\, \mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \frac{|\sin(\pi x)|}{\pi x}\, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{|\sin(\pi(n+u))|}{\pi(n+u)}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{|(-1)^n \sin(\pi u)|}{\pi(n+u)}\, \mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi(n+u)}\, \mathrm{d}x \geq \int_0^1 \frac{\sin(\pi u)}{\pi(n+1)}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi^2(n+1)}.$$

Alors, pour $n \geqslant 1$,

$$\int_0^n |\psi(x)|\, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} |\psi(x)|\, \mathrm{d}x$$
$$\geqslant \frac{2}{\pi^2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty.$$

Cela signifie que la fonction $x \mapsto \int_0^x |\psi(t)|\, \mathrm{d}t$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$, et d'après le cours, cela équivaut à dire que $\psi$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc pas non plus sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\psi \notin E_{\text{cpm}}$.

**I.C.** Soit $f \in E_{\text{cpm}}$. Considérons $A = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ et

$$g : A \times \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ (\xi, t) \mapsto f(t)\, e^{-2i\pi t\xi}.$$

- ○ Pour tout $t \in I$, $\xi \mapsto g(\xi, t)$ est continue sur $A$.
- ○ Pour tout $\xi \in A$, $t \mapsto g(\xi, t)$ est continue par morceaux sur $I$.
- ○ Pour tout $(\xi, t) \in A \times I$,

$$|g(\xi, t)| = |f(t)|.$$

Comme $f \in E_{\text{cpm}}$, elle est continue par morceaux et intégrable sur $I$, donc elle constitue une domination valide de $g$.

D'après le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre,

- pour tout $\xi \in I$, $t \mapsto g(\xi, t)$ est intégrable sur $I$,
- et $\mathscr{F}(f)$ est continue sur $A$.

**I.D.1.** Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puisque $f \in \mathscr{S}$, $x \mapsto x^{n+2} f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$, disons par $M$, donc pour tout $x$ tel que $|x| \geqslant 1$,

$$|x^n f(x)| = \frac{|x^n f(x)|}{x^2} \leqslant \frac{M}{x^2}.$$

Comme $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et sur $]-\infty, -1]$ par parité, il en est de même pour $x \mapsto x^n f(x)$. Donc, puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}$,

$x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

**I.D.2.** Reprenons les notations de la question I.C.

○ Pour tout $t \in I$, $\xi \mapsto g(\xi, t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $A$. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $(\xi, t) \in A \times I$,

$$\frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(\xi, t) = (-2i\pi t)^p f(t)\, e^{-2i\pi t\xi}.$$

○ Pour tout $\xi \in A$, $t \mapsto g(\xi, t)$, $t \mapsto g(\xi, t)$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $A$, d'après la question I.C justement.

○ Pour tout $\xi \in A$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(\xi, t)$ est continue (par morceaux) sur $I$.

○ Enfin, pour tout $(\xi, t) \in A \times I$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(\xi, t)\right| = (2\pi)^p\, |t^p f(t)|.$$

D'après la question précédente, $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc $\frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}$ vérifie bien l'hypothèse de domination.

D'après le théorème de la classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales dépendant d'un paramètre,

- pour tout $\xi \in A$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, $t \mapsto \frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(\xi, t)$ est intégrable sur $I$,
- $\mathscr{F}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $A$,
- et pour tout $\xi \in A$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{F}(f)^{(p)}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^p g}{\partial \xi^p}(\xi, t)\, \mathrm{d}t$$
$$= (-2i\pi)^p \int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t)\, e^{-2i\pi t\xi}\, \mathrm{d}t.$$

**I.E.1.** Bien-sûr, $\theta$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, par croissances comparées, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x \to \pm\infty} x^n\,\theta(x) = 0.$$

Par continuité, $x \mapsto x^n\,\theta(x)$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $\theta \in \mathscr{S}$.

D'après la question précédente, $y = \mathscr{F}(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$y'(\xi) = -2\,i\,\pi \int_{-\infty}^{+\infty} t\,\theta(t)\,e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties,

$$\begin{aligned} y'(\xi) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} (-2\,\pi\,t)\,e^{-\pi t^2}\,e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\ &= i\left[e^{-\pi t^2}\,e^{-2i\pi t\xi}\right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2}\,(-2\,i\,\pi\,\xi)\,e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Ce calcul est valide car tous les objets ont un sens : les deux intégrales convergent, comme $y'(\xi)$ et $y(\xi)$ (à peu de chose près), et le crochet est nul car

$$\lim_{t \to \pm\infty} e^{-\pi t^2}\,e^{-2i\pi t\xi} = 0.$$

Ainsi, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$y'(\xi) = -2\,\pi\,\xi\,y(\xi).$$

**I.E.2.** Alors, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$y(\xi) = y(0)\,e^{-\pi\xi^2}.$$

Or, $y(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 1$, d'après l'énoncé. Donc

$$y(\xi) = e^{-\pi\xi^2},$$

ou encore, $\mathscr{F}(\theta) = \theta.$

**II.A.*** Appliquons le théorème de convergence dominée. Notons encore $A = \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, introduisons les fonctions

$$\theta_n : A \to \mathbb{C},\ \xi \mapsto \mathscr{F}(f)(\xi)\,\theta\!\left(\frac{\xi}{n}\right).$$

∘ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta_n$ est continue (par morceaux) sur $I$.
∘ Par continuité de $\theta$ en 0, sachant que $\theta(0) = 1$, $(\theta_n)$ converge simplement sur $A$ vers $\mathscr{F}(f)$.
∘ Avec la question IC, ou même I.D, $\mathscr{F}(f)$ est continue (par morceaux) sur $A$.
∘ Pour tout $\xi \in A$ et $n \in \mathbb{N}^*$, sachant que pour tout $u \in A$, $\theta(u) \leqslant 1$,

$$|\theta_n(\xi)| = |\mathscr{F}(f)(\xi)|\,\theta\!\left(\frac{\xi}{n}\right) \leqslant |\mathscr{F}(f)(\xi)|,$$

où $\mathscr{F}(f)$ est supposée intégrable sur $A$. Donc l'hypothèse de domination est vérifiée.

D'après le théorème de convergence dominée,
• les $\theta_n$ et $\mathscr{F}(f)$ sont intégrables sur $A$, ce que l'on savait déjà pour $\mathscr{F}(f)$ par hypothèse,
• et la permutation est permise :

$$\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

**II.B.*** Appliquons encore le théorème de convergence dominée aux fonctions

$$f_n : I \to \mathbb{C},\ t \mapsto f\!\left(\frac{t}{n}\right)\mathscr{F}(\theta)(t) = f\!\left(\frac{t}{n}\right)\theta(t),$$

en notant encore $I = \mathbb{R}$.
∘ Les $f_n$ sont continues (par morceaux) sur $I$.
∘ Comme $f$ est continue en 0, $(f_n)$ converge simplement sur $I$ vers $f(0)\,\theta$.
∘ Bien-sûr, $f(0)\,\theta$ est continue (par morceaux) sur $I$.
∘ Pour tout $t \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, sachant que $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle est dans $\mathscr{S}$,

$$|f_n(t)| = \left|f\!\left(\frac{t}{n}\right)\right|\theta(t) \leqslant \|f\|_\infty^I\,\theta(t),$$

où $\theta$ est continue (par morceaux) et intégrable sur $I$. Donc l'hypothèse de domination est vérifiée.

Alors
• les $f_n$ et $f(0)\,\theta$ sont intégrables sur $I$, ce qui n'est pas nouveau pour $\theta$,
• et la permutation est permise :

$$\lim_{n \to +\infty} J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f(0)\,\theta(t)\,\mathrm{d}t = f(0),$$

car $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

**II.C.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\,\theta\!\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2i\pi t\xi}\,\theta\!\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

D'après la formule de Fubini admise,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-2i\pi t\xi}\,\theta\!\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi t\xi}\,\theta\!\left(\frac{\xi}{n}\right)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale intérieure, posons $\xi = nx$ : ce changement de variable est licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tnx}\,\theta(x)\,n\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi tnx}\,\theta(x)\,\mathrm{d}x\right)n\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale extérieure, posons $u = nt$ : là encore, c'est permis.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\!\left(\frac{u}{n}\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2i\pi ux}\,\theta(x)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f\!\left(\frac{u}{n}\right)\mathscr{F}(\theta)(u)\,\mathrm{d}u = J_n. \end{aligned}$$

**II.D.** À l'aide des trois questions précédentes,

$$\boxed{f(0) = \lim_{n\to+\infty} J_n = \lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, fixé. Appliquons ce résultat à la fonction $h$ proposée :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(h)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Naturellement, pour que cela soit valide, il faut vérifier que $h \in \mathscr{S}$.

La continuité de $h$ est acquise.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait que $u \mapsto u^n f(u)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ : notons $M_n$ un majorant de $|u^n f(u)|$. Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$t^n h(t) = t^n f(x+t) = (x+t-x)^n f(x+t).$$

Posons $u = x + t$ :

$$t^n h(t) = (u-x)^n f(u) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k (-x)^{n-k} f(u).$$

Alors

$$|t^n h(t)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} M_k.$$

Ce majorant ne dépend pas de $t$, donc $t \mapsto t^n h(t)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, $h \in \mathscr{S}$ et l'utilisation des résultats précédents est permise.

Bien-sûr, $h(0) = f(x)$. Et pour $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(h)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\, e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+t)\, e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En posant $u = x + t$, qui est un changement de variable licite,

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(h)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi(u-x)\xi}\,\mathrm{d}u \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2i\pi u\xi}\,\mathrm{d}u\right) e^{2i\pi x\xi} \\ &= \mathscr{F}(f)(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}.\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi.}$$

**II.E.** Considérons $f : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$. Elle est bien continue sur $\mathbb{R}$. Et par croissances comparées, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n f(x) = 0,$$

donc $x \mapsto x^n f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f \in \mathscr{S}$.

Déterminons $\mathscr{F}(f)$. Soit $\xi \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(f)(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|t|}\, e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{t}\, e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} e^{-t}\, e^{-2i\pi t\xi}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(1-2i\pi\xi)}}{1-2i\pi\xi}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{t(-1-2i\pi\xi)}}{-1-2i\pi\xi}\right]_{0}^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2i\pi\xi} + \frac{1}{1+2i\pi\xi}\right) = \frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}.\end{aligned}$$

Alors, d'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{1}{2} e^{-|x|} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{F}(f)(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi x\xi}}{1+(2\pi\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}}$$

**III.A.** Comme $f \in \mathscr{S}$, d'après la question I.D,

$\boxed{\mathscr{F}(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$

Comme par hypothèse $\mathscr{F}(f)$ est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, il en est de même pour toute $x \mapsto x^n \mathscr{F}(f)(x)$, qui est donc bornée sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\boxed{\mathscr{F}(f) \in \mathscr{S}.}$

Pour clarifier les écritures, notons $g = \mathscr{F}(f)$ dans cette partie III. D'après la relation (II.1), on a

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\xi)\, e^{-2i\pi(-x)\xi}\,\mathrm{d}\xi = \mathscr{F}(g)(-x).$$

Comme $g \in \mathscr{S}$, toujours d'après la question I.D, $\mathscr{F}(g)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc

$\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$

**III.B.** Soient $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$ en $x_0$ :

$$\begin{aligned}&\left|f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\right| \\ &\leqslant \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,\|f^{(n+1)}\|_\infty^{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Normalement, la borne supérieure doit se prendre sur le segment d'extrémités $x_0$ et $x$. Mais comme $f^{(n+1)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$, autant prendre la borne supérieure sur $\mathbb{R}$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Avec les notations de la question précédente,

$$f^{(n+1)}(\xi) = (-1)^{n+1}(\mathscr{F}(g))^{(n+1)}(-\xi).$$

Avec la question I.D, sachant que $g$ est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}|f^{(n+1)}(\xi)| &= |(\mathscr{F}(g))^{(n+1)}(-\xi)| \\ &= (2\pi)^{n+1}\left|\int_{-1/2}^{1/2} t^{n+1} g(t)\, e^{-2i\pi t(-\xi)}\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant (2\pi)^{n+1}\int_{-1/2}^{1/2} |t^{n+1} g(t)\, e^{2i\pi t\xi}|\,\mathrm{d}t \\ &= (2\pi)^{n+1}\int_{-1/2}^{1/2} |t|^{n+1}\,|g(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant (2\pi)^{n+1}\int_{-1/2}^{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \|g\|_\infty^{\mathbb{R}}\,\mathrm{d}t \\ &= \pi^{n+1}\,\|g\|_\infty^{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\|f^{(n+1)}\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \pi^{n+1}\,\|g\|_\infty^{\mathbb{R}}$ donc

$$\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,\|f^{(n+1)}\|_\infty^{\mathbb{R}} \leqslant \frac{(\pi\,|x-x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}\,\|g\|_\infty^{\mathbb{R}}.$$

Par croissances comparées, ce majorant tend vers 0 quand $n$ augmente, donc

$$\lim_{n\to+\infty}\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k\right| = 0,$$

ce qui prouve que la série

$$\sum \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

converge et a pour somme $f(x)$. Pour finir, avec les calculs précédents,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x_0) &= (\mathscr{F}(g))^{(k)}(-x_0) \\ &= (2\,i\,\pi)^k\int_{-1/2}^{1/2}\xi^k\,g(\xi)\,e^{-2i\pi(-x_0)\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}(2\,i\,\pi\,\xi)^k\,\mathscr{F}(f)(\xi)\,e^{2i\pi x_0\xi}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Et l'on trouve l'expression annoncée.

**III.C.*** Supposons $f$ nulle en dehors d'un segment $[a,b]$. Alors il existe $x_0 \notin [a,b]$ et $r > 0$ tel que $f = 0$ sur $]x_0-r, x_0+r[$. Alors, pour tout $h \in\, ]-r,r[$, $x_0+h \in\, ]x_0-r, x_0+r[$ et avec la question précédente,

$$0 = f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{h^n}{n!}\,f^{(n)}(x_0).$$

On vient d'écrire le développement en série entière de la fonction nulle sur $]-r,r[$, en la variable $h$. Par unicité dudit développement, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f^{(n)}(x_0) = 0$. Mais avec la question précédente, on en déduit que $f(x) = 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Si $f$ est nulle en dehors d'un segment, elle est nulle partout.

**IV.A.1.** Comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas,

$g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[\,\setminus\{0\}$.

Comme $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle admet un développement limité à l'ordre 1 en 0 : pour $x \neq 0$ proche de 0,

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{f(x)-f(0)}{\sin(\pi x)} = \frac{f'(0)\,x+\mathrm{o}(x)}{\pi\,x+\mathrm{o}(x)} \\ &= \frac{f'(0)+\mathrm{o}(1)}{\pi+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{f'(0)}{\pi} = g(0). \end{aligned}$$

Donc $g$ est continue sur $]-1,1[$.

**IV.A.2.** Pour $x\neq 0$,

$$g'(x) = \frac{f'(x)\sin(\pi x)-\pi\,(f(x)-f(0))\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

Faisons à nouveau un développement limité en 0. $f'$ en admet un car elle est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Commençons par le numérateur : on obtient

$$\begin{aligned} &(f'(0)+f''(0)\,x+\mathrm{o}(x))\,(\pi\,x+\mathrm{o}(x^2)) \\ &-\pi\,(f'(0)\,x+\tfrac{1}{2}\,f''(0)+\mathrm{o}(x^2))\,(1+\mathrm{o}(x)) \\ &= \tfrac{1}{2}\,f''(0)\,\pi\,x^2+\mathrm{o}(x^2). \end{aligned}$$

Et le dénominateur devient

$$(\pi\,x+\mathrm{o}(x))^2 = \pi^2\,x^2+\mathrm{o}(x^2).$$

Alors,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1}{2}\,f''(0)\,\pi\,x^2+\mathrm{o}(x^2)}{\pi^2\,x^2+\mathrm{o}(x^2)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\,f''(0)+\mathrm{o}(1)}{\pi+\mathrm{o}(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{f''(0)}{2\,\pi}. \end{aligned}$$

D'après un théorème du cours, comme $g$ est continue sur $]-1,1[$, qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[\,\setminus\{0\}$ et que $g'$ admet une limite finie en 0,

$g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $g'(0) = \dfrac{f''(0)}{2\pi}$.

**IV.B.** Sans difficulté,

$$\begin{aligned} \int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{k=-n}^{n}\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi kx}\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\sum_{\substack{k=-n\\k\neq 0}}^{n}\left[\frac{e^{2i\pi kx}}{2\,i\,\pi\,k}\right]_{-1/2}^{1/2}}_{=0} + \int_{-1/2}^{1/2}\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

**IV.C.*** Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}$. Comme somme géométrique de premier terme $e^{-2i\pi nx}$ et de raison $e^{2i\pi x}\neq 1$,

$$\begin{aligned} S_n(x) &= e^{-2i\pi nx}\,\frac{1-e^{2i\pi(2n+1)x}}{1-e^{2i\pi x}} \\ &= e^{-2i\pi nx}\,\frac{e^{i\pi(2n+1)x}\,(e^{-i\pi(2n+1)x}-e^{i\pi(2n+1)x})}{e^{i\pi x}\,(e^{-i\pi x}-e^{i\pi x})} \\ &= \frac{\sin((2\,n+1)\,\pi\,x)}{\sin(\pi\,x)}. \end{aligned}$$

**IV.D.*** Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\sum_{k=-n}^{n} e^{2i\pi kx}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x)\,S_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}(f(x)-f(0))\,S_n(x)\,\mathrm{d}x + f(0)\int_{-1/2}^{1/2}S_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1/2}^{1/2}(f(x)-f(0))\,S_n(x)\,\mathrm{d}x + f(0). \end{aligned}$$

Pour $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]\setminus\{0\}$, avec l'expression de la question IV.C,

$$(f(x)-f(0))\,S_n(x) = g(x)\sin((2\,n+1)\,\pi\,x).$$

Et cette égalité reste valable pour $x = 0$, car les deux membres sont alors nuls. Donc

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) = f(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

**IV.E.*** D'après la question IV.A, $g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc on peut réaliser une intégration par parties.

$$\begin{aligned}&\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-g(x)\,\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi}\right]_{-1/2}^{1/2}\\ &\quad+\int_{-1/2}^{1/2} g'(x)\,\frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)\pi}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{-1/2}^{1/2} g'(x)\cos((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Alors, puisque $g'$ est bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ — elle y est continue,

$$\begin{aligned}&\left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{-1/2}^{1/2} |g'(x)|\,|\cos((2n+1)\pi x)|\,\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{(2n+1)\pi}\int_{-1/2}^{1/2} \|g'\|_\infty^{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}\,\mathrm{d}x = \frac{\|g'\|_\infty^{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}{\pi(2n+1)}.\end{aligned}$$

**IV.F.** Soit $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, fixé. L'inégalité demandée suggère d'utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $G_t$ à l'ordre 2 en 0. Pour raccourcir (un peu) les écritures, utilisons la notation de l'énoncé à la question suivante : $h_t(x) = f(x+t)$, donc $h_t(0) = f(t)$. Mieux, ou *pire*, omettons la dépendance en $t$ : c'est plus confortable et plus dangereux. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$G(x) = h'(x)\sin(\pi x) - (h(x) - h(0))\,\pi\cos(\pi x).$$

Puisque $f$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, $G$ l'est sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. En particulier, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\begin{aligned}G'(x) &= h''(x)\sin(\pi x) + h'(x)\pi\cos(\pi x)\\ &\quad - h'(x)\pi\cos(\pi x) + (h(x)-h(0))\pi^2\sin(\pi x)\\ &= h''(x)\sin(\pi x) + (h(x)-h(0))\pi^2\sin(\pi x),\\ G''(x) &= h'''(x)\sin(\pi x) + h''(x)\pi\cos(\pi x)\\ &\quad + h'(x)\pi^2\sin(\pi x) + (h(x)-h(0))\pi^3\cos(\pi x).\end{aligned}$$

On voit que $G(0) = G'(0) = 0$. D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange annoncée,

$$|G(x)| = |G(x) - G(0) - G'(0)x| \leqslant \frac{x^2}{2}\,\|G''\|_\infty^{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}.$$

En outre, avec l'inégalité triangulaire et en bornant les fonctions trigonométriques par 1,

$$\begin{aligned}|G''(x)| &\leqslant |h'''(x)| + \pi\,|h''(x)| + \pi^2\,|h'(x)| + \pi^3\,|h(x)|\\ &\leqslant \|h'''\|_\infty^{\mathbb{R}} + \pi\,\|h''\|_\infty^{\mathbb{R}} + \pi^2\,\|h'\|_\infty^{\mathbb{R}} + \pi^3\,\|h\|_\infty^{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Et comme $h$ n'est qu'une translation de $f$, sa norme infinie et celles de ses dérivées sont celles de $f$, et de ses dérivées :

$$|G''(x)| \leqslant \|f'''\|_\infty^{\mathbb{R}} + \pi\|f''\|_\infty^{\mathbb{R}} + \pi^2\|f'\|_\infty^{\mathbb{R}} + \pi^3\|f\|_\infty^{\mathbb{R}}.$$

Alors,

$$\|G''\|_\infty^{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \leqslant \sum_{k=0}^{3} \pi^k\,\|f^{(3-k)}\|_\infty^{\mathbb{R}}$$

Finalement, en posant

$$D = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} \pi^k\,\|f^{(3-k)}\|_\infty^{\mathbb{R}},$$

pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$|G(x)| \leqslant D\,x^2.$$

L'objectif est atteint, car $D$ ne dépend ni de $x$, ni de $t$.

**IV.G.** Soit $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, fixé. Utilisons le même abus d'écriture en omettant la dépendance en $t$.

La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique : les premières questions de la partie IV lui sont donc applicables.

Introduisons la fonction suivante, que l'on notera abusivement encore $g$ plutôt que $g_t$ : pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$g(x) = \frac{h(x) - h(0)}{\sin(\pi x)} \text{ si } x \notin \{-1, 0, 1\},$$
$$g(0) = \frac{h'(0)}{\pi},\ g(-1) = g(1) = -g(0).$$

D'après la question IV.D,

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(h) = h(0) + \int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

D'une part, pour $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}c_k(h) &= \int_{-1/2}^{1/2} h(x)\,e^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1/2}^{1/2} f(x+t)\,e^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En posant $y = x + t$,

$$\begin{aligned}c_k(h) &= \int_{t-1/2}^{t+1/2} f(y)\,e^{-2i\pi k(y-t)}\,\mathrm{d}y\\ &= e^{2i\pi kt}\int_{t-1/2}^{t+1/2} f(y)\,e^{-2i\pi ky}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Or la fonction $y \mapsto f(y)\,e^{-2i\pi ky}$ est 1-périodique, donc son intégrale sur tout intervalle de longueur 1 — une période — est la même. Ainsi,

$$c_k(h) = e^{2i\pi kt}\int_{1/2}^{1/2} f(y)\,e^{-2i\pi ky}\,\mathrm{d}y = e^{2i\pi kt}\,c_k(f).$$

D'autre part, $h(0) = f(t)$. Et enfin, d'après la question IV.E,

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{\|g'\|_\infty^{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}}{(2n+1)\pi}.$$

Ici, en reprenant l'expression de la question IV.A.2 et les notations de la question IV.F, pour $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{h'(x)\sin(\pi x) - \pi\,(h(x)-h(0))\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \\ &= \frac{f'(x+t)\sin(\pi x) - \pi\,(f(x+t)-f(t))\cos(\pi x)}{\sin^2(\pi x)} \\ &= \frac{G(x)}{\sin^2(\pi x)}. \end{aligned}$$

Alors, avec le résultat de la question IV.F,

$$|g'(x)| \leqslant \frac{D\,x^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

Jouons un peu. On sait que pour $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin u \geqslant \frac{2}{\pi}\,u$, donc $\sin^2 u \geqslant \frac{4}{\pi^2}\,u^2$ et c'est encore vrai sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par parité. En posant $u = \pi x$, $u \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ car $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, donc

$$\frac{x^2}{\sin^2(\pi x)} \leqslant \frac{x^2}{\frac{4}{\pi^2}\,(\pi x)^2} = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$,

$$|g'(x)| \leqslant \frac{D}{4}.$$

Et comme $g'$ est continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, cette majoration est encore vraie en 0. Alors

$$\|g'\|_\infty^{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]} \leqslant \frac{D}{4},$$

et

$$\left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{D}{4\pi\,(2n+1)}.$$

*Commentaire.* Cette majoration explicite est inutilement sophistiquée. Il aurait suffi de dire que la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2}{\sin^2(\pi x)}$$

est clairement continue sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$, et avec un rapide calcul d'équivalents, qu'elle se prolonge par continuité en 0. Donc elle est bornée sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \setminus \{0\}$.

Ainsi, pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$\underline{\left|f(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,e^{2i\pi kt}\right|} = \left|h(0) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(h)\right| = \left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \underline{\frac{D}{4\pi\,(2n+1)}}.$$

**V.A.** La fonction $\mathscr{F}(f)$ est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ : cela signifie qu'en $\frac{1}{2}$ à droite et en $-\frac{1}{2}$ à gauche, elle est identiquement nulle, ainsi que ses dérivées. Comme elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il doit en être de même en $\frac{1}{2}$ à gauche et en $-\frac{1}{2}$ à droite.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(\mathscr{F}(f))^{(n)}(\tfrac{1}{2}) = (\mathscr{F}(f))^{(n)}(-\tfrac{1}{2}) = 0.$$

**V.B.** Par définition, $h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, car elle y coïncide avec $\mathscr{F}(f)$. Par 1-périodicité, il en est de même sur $\mathbb{R} \setminus (\frac{1}{2} + \mathbb{Z})$.

De plus, avec la question précédente, $h$ est nulle en $\frac{1}{2}$ à gauche et en $-\frac{1}{2}$ à droite, ainsi que ses dérivées. Alors par 1-périodicité, il en est de même en $\frac{1}{2}$ à droite et $-\frac{1}{2}$ à gauche. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(\frac{1}{2}) = 0$, donc par 1-périodicité, $h^{(n)}$ est nulle sur $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.

Finalement, $h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

*Commentaire.* Les notations ne sont pas très heureuses. Désormais, la fonction $h$ est celle que l'on vient de définir, et plus celle de la partie IV.

**V.C.** La fonction $h$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 1-périodique donc avec l'inégalité (IV.1), il existe $E$ tel que pour tout $t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

$$\left|h(t) - \sum_{k=-n}^{n} c_k(h)\,e^{2i\pi kt}\right| \leqslant \frac{E}{2n+1}.$$

Comme la suite $(E/(2n+1))$ tend vers 0 et ne dépend pas de $t$, cela signifie d'après le cours que la suite de fonctions

$$\left(t \mapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(h)\,e^{2i\pi kt}\right)$$

converge uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vers $h$. Or $h$ coïncide avec $\mathscr{F}(f)$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Ainsi, la suite de fonctions

$$\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k\,e_k\right)$$

converge uniformément sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ vers $\mathscr{F}(f)$, où l'on a posé, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $e_k : t \mapsto e^{2i\pi kt}$ et

$$d_k = \int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{F}(f)(x)\,e^{-2i\pi kx}\,\mathrm{d}x.$$

**V.D.** Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'égalité (II.1), sachant que $\mathscr{F}(f)$ est nulle en dehors de $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$,

$$f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{F}(f)(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

D'après la question précédente, pour $n$ grand, $\mathscr{F}(f)(\xi)$ est proche de

$$\sum_{k=-n}^{n} d_k\,e^{2i\pi k\xi}.$$

Là, on évoque la convergence simple, qui découle de la convergence uniforme. Alors, on a l'idée de calculer

$$\begin{aligned} &\int_{-1/2}^{1/2}\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k\,e^{2i\pi k\xi}\right) e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \sum_{k=-n}^{n} d_k \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Si $x+k\neq 0$,

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\,\mathrm{d}\xi = \left[\frac{e^{2i\pi(x+k)\xi}}{2i\pi(x+k)}\right]_{-1/2}^{1/2}$$
$$= \frac{e^{i\pi(x+k)}-e^{-i\pi(x+k)}}{2i\pi(x+k)} = \frac{\sin(\pi(x+k))}{\pi(x+k)} = \psi_k(x).$$

Et si $x+k=0$,

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\,\mathrm{d}\xi = 1 = \psi(0) = \psi_k(-k).$$

Dans tous les cas,

$$\psi_k(x) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\,\mathrm{d}\xi.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k\,\psi_k(x)\\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{F}(f)(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad - \sum_{k=-n}^{n} d_k \int_{-1/2}^{1/2} e^{2i\pi(x+k)\xi}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{F}(f)(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\\
&\quad - \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{k=-n}^{n} d_k\,e^{2i\pi k\xi}\right) e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi\\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\mathscr{F}(f)(\xi) - \sum_{k=-n}^{n} d_k\,e^{2i\pi k\xi}\right) e^{2i\pi x\xi}\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \sum_{k=-n}^{n} d_k\,\psi_k(x)\right|\\
&\leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \left|\mathscr{F}(f)(\xi) - \sum_{k=-n}^{n} d_k\,e^{2i\pi k\xi}\right| \mathrm{d}\xi\\
&\leqslant \int_{-1/2}^{1/2} \left\|\mathscr{F}(f) - \sum_{k=-n}^{n} d_k\,e_k\right\|_\infty^{[-\frac12,\frac12]} \mathrm{d}\xi\\
&= \left\|\mathscr{F}(f) - \sum_{k=-n}^{n} d_k\,e_k\right\|_\infty^{[-\frac12,\frac12]}.
\end{aligned}$$

Ce majorant tend vers 0 avec $n$ et ne dépend pas de $x$, donc

la suite de fonctions
$$\left(\sum_{k=-n}^{n} d_k\,\psi_k\right)$$
converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $f$.

**V.E.** Soit $j\in\mathbb{Z}$. En utilisant la relation (II.1) et la question V.C, on a

$$\underline{f(-j)} = \int_{-1/2}^{1/2} \mathscr{F}(f)(\xi)\,e^{-2i\pi j\xi}\,\mathrm{d}\xi \underline{= d_j.}$$