# Vingt-et-unième devoir à la maison

[ENS13]
4 heures
*Aucune calculatrice n'est autorisée*

*Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.*

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs, $\mathbb{R}_+^-$ l'ensemble des nombres réels strictement négatifs, et $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pour $I$ intervalle de $\mathbb{R}$, on note $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour une fonction $f$ continue et bornée sur $I$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$.

On note pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $m \in \mathbb{R}$

$$T_m(x) = \int_0^\infty t^m\, e^{-(t^2+x/t)}\,\mathrm{d}t.$$

On pourra librement utiliser la formule $T_0(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

**1. a)** Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$, l'intégrale qui définit $T_m(x)$ est convergente.

**b)** Quel est l'intervalle $A$ des $m \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale qui définit $T_m(0)$ est convergente ?

**c)** Calculer $T_{2k}(0)$ et $T_{2k+1}(0)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (en fonction de $k!$ et $(2k)!$).

**2. a)** Soit $m \in A$. Montrer que $T_m$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

**b)** Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que $T_m$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**c)** Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$,

$$T_m(x) \geqslant e^{-1}\int_0^1 t^m\, e^{-x/t}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire la valeur de $\lim_{x\to 0^+} T_m(x)$ lorsque $m \notin A$, en utilisant le changement de variable $w = x/t$.

**3. a)** Soit $m \in \mathbb{R}$. Montrer que $T_m$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et calculer $T_m'$ en fonction de $T_{m-1}$.

**b)** Soit $m \in \mathbb{R}$. La fonction $T_m$ est-elle de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ? Quel est le sens de variation de $T_m$ sur $\mathbb{R}_+^*$ ? La fonction $T_m$ est-elle convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ ?

**c)** Discuter en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la dérivabilité à droite de $T_m$ en 0.

**4. a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Calculer $T_m(x)$ en fonction de $T_{m-2}(x)$ et $T_{m-3}(x)$. On pourra pour cela considérer la quantité

$$\int_A^B t^{m-1}\,(2t - x/t^2)\,e^{-(t^2+x/t)}\,\mathrm{d}t,$$

pour $0 < A < B$.

**b)** Soit $m \in \mathbb{R}$. Trouver une relation entre $x T_m'''(x)$, $T_m''(x)$ et $T_m(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

**5. a)** Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Effectuer le changement de variable $t = 1/u$ dans l'intégrale qui définit $T_m$. On justifiera soigneusement le calcul.

**b)** Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de la quantité $\int_0^\infty u^n\, e^{-u}\,\mathrm{d}u$ et la calculer.

**c)** Montrer que pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $T_{-m}(1) \leqslant (m-2)!$

**d)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le rayon de convergence $R$ de la série entière $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\,T_{k-n}(1)\,x^n$ vérifie $R \geqslant 1$.

**e)** Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que pour $x \in \left]-1,1\right[$,

$$T_k(1+x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}\,T_{k-n}(1)\,x^n.$$

**6.** Pour $t, x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g(t,x) = t^2 + x/t$.

**a)** Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x)$ est convexe et admet un unique minimum en $t = M(x)$, que l'on déterminera. Calculer $g(M(x),x)$.

**b)** Soit $m \in \mathbb{R}_+$, et $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer en utilisant l'inégalité $M(x) \leqslant x^{1/3}$ que

$$T_m(x) \leqslant \int_0^{x^{1/3}} t^m e^{-g(t,x)}\mathrm{d}t + e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}}\left(\int_{x^{1/3}}^\infty t^m e^{-\frac{t^2}{20}}\mathrm{d}t\right).$$

**c)** Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ (et $m \in \mathbb{R}_+$), l'on peut trouver $C > 0$ tel que

$$\forall t \geqslant 1,\ t^m \leqslant C\,t\,e^{\varepsilon t^2}.$$

En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$e^{-\frac{19}{10}x^{2/3}}\left(\int_{x^{1/3}}^\infty t^m\, e^{-\frac{t^2}{20}}\,\mathrm{d}t\right) = \underset{x\to\infty}{\mathrm{O}}\left(e^{-[\frac{39}{20}-\varepsilon]x^{2/3}}\right).$$

**d)** Montrer que

$$T_m(x) = \underset{x\to\infty}{\mathrm{O}}\left(x^{\frac{m+1}{3}}\, e^{-3(x/2)^{2/3}}\right).$$

**7. a)** Montrer que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$T_{-1}(x) \leqslant \int_0^1 e^{-1/u^2}\,\frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^\infty e^{-xu}\,\frac{\mathrm{d}u}{u}.$$

En déduire que $T_{-1}(x) \leqslant 2$ pour $x \geqslant 1$ et que

$$T_{-1}(x) \leqslant 2 + \int_x^1 e^{-w}\,\frac{\mathrm{d}w}{w} \leqslant 2 - \ln x$$

si $0 < x \leqslant 1$.

**b)** Soit $L \in [0,1]$, et $\rho \in C([0,L])$. On pose

$$[F(\rho)](x) = \int_0^L \rho(y)\,T_{-1}(|x-y|)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $[F(\rho)](x)$ est bien définie pour $x \in [0,L]$ et que

$$\|F(\rho)\|_\infty \leqslant (4L + 2L|\ln L|)\,\|\rho\|_\infty.$$

**8.** Soit $L > 0$, $\rho \in C([0, L])$, et $g_0$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose pour $x \in [0, L]$ et $v \in \mathbb{R}^*$ :

$$g(x, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_x^L \rho(y)\, e^{-\frac{x-y}{v}}\, \mathrm{d}y, \text{ si } v < 0,$$

$$g(x, v) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-v^2}}{|v|} \int_0^x \rho(y) e^{-\frac{x-y}{v}}\, \mathrm{d}y + g_0(v) e^{-\frac{x}{v}}, \text{ si } v > 0.$$

**a)** Montrer que $\alpha : x \in [0, L] \mapsto \int_0^\infty g_0(v)\, e^{-\frac{x}{v}}\, \mathrm{d}v$ définit une fonction de $C([0, L])$.

**b)** Montrer que pour $v \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \in [0, L] \mapsto g(x, v)$ est de classe $C^1$ sur $[0, L]$ et

$$\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R},\ v \frac{\partial g}{\partial x}(x, v) = \rho(x) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - g(x, v),$$

$$\forall v \in \mathbb{R}_+^*,\ g(0, v) = g_0(v), \quad \forall v \in \mathbb{R}_-^*,\ g(L, v) = 0.$$

**9.** On admet dans cette question le théorème suivant : Soit $L > 0$ ; si $H$ est une application de $C([0, L])$ dans $C([0, L])$ vérifiant

$$\exists k \in [0, 1[, \forall \rho_1, \rho_2 \in C([0, L]),$$
$$\|H(\rho_1) - H(\rho_2)\|_\infty \leqslant k\, \|\rho_1 - \rho_2\|_\infty,$$

alors il existe un unique $\rho \in C([0, L])$ tel que $H(\rho) = \rho$.

**a)** Soit $L > 0$ et $\widetilde{\alpha} \in C([0, L])$. Montrer que si $L \in\, ]0, 1/20[$, il existe une unique fonction $\widetilde{\rho} \in C([0, L])$ telle que

$$\forall x \in [0, L],\ \widetilde{\rho}(x) = \widetilde{\alpha}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^L \widetilde{\rho}(y) T_{-1}(|x-y|) \mathrm{d}y.$$

**b)** Soit $L \in\, ]0, 1/20[$, et $g_0$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe une fonction $\widetilde{g}$ de $[0, L] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- $\forall v \in \mathbb{R}^*$, $\widetilde{g}(\cdot, v)$ est de classe $C^1$ sur $[0, L]$,
- $\forall x \in [0, L]$, $\widetilde{g}(x, \cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$,
- $\forall x \in [0, L], v \in \mathbb{R}^*$,

$$v \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial x}(x, v) = \left( \int_{\mathbb{R}_+^*} \widetilde{g}(x, w)\, \mathrm{d}w + \int_{\mathbb{R}_-^*} \widetilde{g}(x, w)\, \mathrm{d}w \right) \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-v^2} - \widetilde{g}(x, v),$$

- $\forall v \in \mathbb{R}_+^*$, $\widetilde{g}(0, v) = g_0(v)$, $\quad \forall v \in \mathbb{R}_-^*$, $\widetilde{g}(L, v) = 0$.

L'équation pour laquelle on a démontré un théorème d'existence est un modèle simplifié pour l'acoustique des gaz raréfiés.