Vingt-troisième devoir à la maison

Résolution d'une équation fonctionnelle

[CCINP21]

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0, \\ \forall x \in]0,+\infty[,\ f(x+1)+f(x) = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Partie I – Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$.

Q2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$\varphi(x+1)+\varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Q3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \forall n \in \mathbb{N},\ \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q5. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II – Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

Q7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

Q8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

Q9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0,+\infty[,\ \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\,(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

Q11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1,+\infty[,\ \frac{1}{x^2} \leqslant 2\,\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III – Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

Q12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Q13. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$