

Vingt-quatrième devoir à la maison

Exercice

[E3A22]

1. Question de cours.

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et T -périodique. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^{x+T} f(u) du = \int_0^T f(u) du.$$

On se propose de déterminer des fonctions y de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel x , la relation :

$$(*) \quad xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0.$$

2. On suppose qu'il existe une fonction g , développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(*)$, sous la forme

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

2.1. Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geq 1$ une relation entre a_{n+1} et a_{n-1} .

2.2. Déterminer alors a_n pour tout entier naturel n .

2.3. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g ainsi obtenue.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2x \cos(t)) dt.$$

3. Quelques propriétés de la fonction F .

3.1. Étudier la parité de la fonction F .

On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.

3.2. Pour tout couple (x, t) de $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, on pose $h(x, t) = \exp(2x \cos(t))$.

3.2.1. Justifier que h est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.2. Prouver que pour k non nul, la fonction $\frac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$.

3.2.3. Soit I un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier k non nul, il existe un réel positif M_k tel que :

$$\forall (x, t) \in I \times [0, 2\pi], 0 \leq \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq M_k.$$

3.2.4. En déduire que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3.2.5. Donner pour tout x réel et tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

3.3. Démontrer que F vérifie la relation $(*)$.

4. Développement en série entière de F .

4.1. Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

4.2. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$$

où I_n s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale

$$J_n = \int_0^{2\pi} \cos^n(t) dt.$$

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4.3. Calculer J_0 et J_1 .

4.4. Soit $n \geq 2$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2} .

4.5. En déduire, pour tout entier naturel n , une expression de J_n en fonction de n .

4.6. Comparer alors les fonctions F et g .