Vingt-cinquième devoir à la maison

[E3A19]
Durée 3 h
L'usage de calculatrices est interdit.

Questions de cours

1. Citer le théorème de Cauchy linéaire pour un système différentiel.

2. On rappelle que j est le nombre complexe : $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, où i vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$.

2.1. Déterminer le module et un argument de j.

2.2. Déterminer la valeur de $s_k = 1 + \mathrm{j}^k + \mathrm{j}^{2k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2.3. Déterminer les solutions dans $\mathbb{C}$ du système :

$$\begin{cases} a + \ \ b + \ \ c = 1 \\ a + \ \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2 c = 0 \\ a + \mathrm{j}^2 b + \ \mathrm{j}c = 0 \end{cases}$$

où a, b et c sont les inconnues.

3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Donner sans démonstration l'expression du déterminant de Vandermonde de la matrice :

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}).$$

Le résultat et l'expression obtenus dans la question 3. ne devront plus être utilisés dans la suite du problème.

Partie 1

Soient $n \geqslant 3$ un entier naturel, $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})$ une famille de n éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et :

$$V_\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1} \\ \gamma_0^2 & \gamma_1^2 & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \gamma_0^{n-1} & \gamma_1^{n-1} & \cdots & \cdots & \gamma_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que s'il existe un couple $(i, j) \in [\![0, n-1]\!]^2$ avec $i \neq j$ tel que $\gamma_i = \gamma_j$, alors $\det(V_\gamma) = 0$.

2. On suppose les γ_i distincts deux à deux et on note C_j la colonne d'indice j de la matrice ${}^tV_\gamma$.

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des scalaires tels que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, C_j = 0.$$

En utilisant le polynôme $P = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, X^{j-1}$, montrer que :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ \lambda_j = 0.$$

Que peut-on en déduire pour $\det(V_\gamma)$? **On ne calculera pas $\det(V_\gamma)$.**

3. On suppose toujours que les γ_k sont distincts deux à deux.

Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction ψ_k par : $x \mapsto \mathrm{e}^{\gamma_k x}$.

3.1. Soient $(m_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ des scalaires et

$$\Psi = \sum_{k=0}^{n-1} m_k\, \psi_k.$$

Calculer les dérivées successives de Ψ jusqu'à l'ordre $n-1$.

3.2. En déduire que la famille $(\psi_k)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

Partie 2

Soit (E_1) l'équation différentielle $y^{(3)} = y$.

1. Soit f une solution à valeurs complexes de cette équation.

1.1. Déterminer une équation différentielle linéaire du premier ordre (E_2) vérifiée par la fonction $g = f + f' + f''$.

1.2. Résoudre l'équation (E_2).

1.3. En déduire l'ensemble des solutions à valeurs complexes de l'équation (E_1).

2. Soit (S) le système différentiel à coefficients constants $X' = AX$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R},$$

où x, y et z sont des fonctions de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{C}$.

2.1. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$? dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?

2.2. Résoudre le système (S).

2.3. Retrouver alors par cette méthode les solutions de l'équation (E_1) obtenues à la question **1.3.** de cette partie.

3. On considère la série entière réelle $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$.

3.1. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière. On note alors, lorsque cela existe,

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}.$$

3.2. Justifier que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3.3. Déterminer les développements en série entière de φ', φ'', $\varphi^{(3)}$ puis $\varphi^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

3.4. En utilisant les questions précédentes, déterminer une expression de φ n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

3.5. Déterminer une expression de

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!}$$

n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

3.6. Déterminer une expression de

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!}$$

n'utilisant que des fonctions usuelles **à valeurs réelles**.

Partie 3

Dans la suite du problème

- toutes les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,
- n est un entier naturel supérieur ou égal à 3,
- $\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ est un élément de $\mathbb{K}^n$ et

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).$$

En outre, lorsque $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, on note

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

qui est donc un élément de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}^n)$.

Soient :

- (E_α) l'équation différentielle linéaire :

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, y^{(k)},$$

- $\mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{K}),\ f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{(k)} \right\}$.

1.

1.1. Écrire l'équation différentielle (E_α) à l'aide d'un système différentiel.

1.2. Montrer que si $y \in \mathscr{S}_\alpha$, alors $y \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

1.3. Prouver que $\mathscr{S}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$.

1.4. Déterminer la dimension de $\mathscr{S}_\alpha$.

On prend jusqu'à la fin de cette partie :

$\boldsymbol{\alpha = (1, 0, \dots, 0)}$ **et** $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

2. Écrire l'équation (E_α) dans ce cas.

3. Déterminer tous les nombres complexes r pour lesquels la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{rx}$ appartient à $\mathscr{S}_\alpha$.

4. Donner une base de $\mathscr{S}_\alpha$ (on pourra utiliser des résultats obtenus dans la partie **1**).

5. Soit d l'application qui à $y \in \mathscr{S}_\alpha$ associe $d(y) = y'$.

5.1. Vérifier que d est un endomorphisme de $\mathscr{S}_\alpha$.

5.2. L'endomorphisme d est-il bijectif ?

5.3. L'endomorphisme d est-il diagonalisable ?

Partie 4

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (et donc

$$\mathscr{S}_\alpha = \left\{ f \in \mathscr{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k\, f^{(k)} \right\}),$$

$n = 2p$ et on considère l'équation différentielle : $y^{(2p)} = y$.

On note S_1 (resp. S_2) l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ solutions de l'équation différentielle $y^{(p)} = y$ (resp. $y^{(p)} = -y$).

Pour f et g dans $\mathscr{S}_\alpha$, on note

$$(f \mid g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-3|t|} \Big[f(t)\, g(t) + f^{(p)}(t)\, g^{(p)}(t) \Big] \,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que cette expression a un sens pour tous f et g de $\mathscr{S}_\alpha$.

On admettra que pour tout f de $\mathscr{S}_\alpha$, on a au voisinage de $+\infty$: $f(t) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^t)$ et au voisinage de $-\infty$: $f(t) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{-t})$.

2. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur $\mathscr{S}_\alpha$.

3. Montrer que S_1 et S_2 sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathscr{S}_\alpha$.

4. Exemple : $n = 4$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{4k}}{(4k)!}$.

On admet que f est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

4.1. Déterminer α de sorte que $f \in \mathscr{S}_\alpha$.

4.2. Expliciter les projetés orthogonaux de f sur S_1 et sur S_2.

4.3. En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles réelles.