Corrigé du vingt-cinquième devoir à la maison

QC. Voir le cours.

I.1. Oui, car alors deux colonnes de V_γ sont égales.

I.2. Par construction, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$C_j = \begin{pmatrix} \gamma_0^{j-1} \\ \gamma_1^{j-1} \\ \vdots \\ \gamma_{n-1}^{j-1} \end{pmatrix}.$$

Alors, l'égalité $\sum_{j=1}^n \lambda_j C_j = 0$ devient

$$\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma_i^{j-1} = 0,$$

c'est-à-dire $P(\gamma_i) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Ainsi, le polynôme P , de degré inférieur ou égal à $n-1$, admet n racines distinctes, les γ_i , donc il est nul :

$$\boxed{\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_j = 0.}$$

Cela signifie que les colonnes C_j forment une famille libre, donc une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors ${}^t V_\gamma$ est inversible, donc aussi V_γ et $\boxed{\det(V_\gamma) \neq 0}$.

I.3.1. Bien-sûr, Ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, car l'exponentielle l'est. De plus, pour tout $(i, k) \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket^2$, $\psi_k^{(i)} = \gamma_k^i \psi_k$, donc

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \Psi^{(i)} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^i \psi_k.}$$

I.3.2. Soient des scalaires $(m_k)_{0 \leq k \leq n-1}$ tels que

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0,$$

autrement dit tels que $\Psi = 0$. Alors, les dérivées successives sont également identiquement nulles. En les évaluant en 0, pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $\Psi^{(i)}(0) = 0$, autrement dit

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^0 \\ \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^1 \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{n-1} m_k \gamma_k^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$V_\gamma \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Comme V_γ est inversible, on en tire que

$$\begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc les m_k sont tous nuls.

On vient de prouver que si $\sum_{k=0}^{n-1} m_k \psi_k = 0$, alors $m_0 = \dots = m_{n-1} = 0$. Cela signifie que

$$\boxed{\text{la famille } (\psi_k)_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est libre dans } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}).}$$

II.1.1. Comme f est solution de (E_1) sur $\mathbb{R}$, par définition elle est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, donc g l'est une fois. De plus

$$g' = f' + f'' + f''' = f' + f'' + f = g.$$

$$\boxed{g \text{ est solution sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_2) : y' = y.}$$

II.1.2. D'après le cours,

$$\boxed{\text{l'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_2) \text{ est Vect}(\exp).}$$

II.1.3. Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel qu'elle soit solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(*) \quad y + y' + y'' = \lambda \exp.$$

L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$, dont les racines sont j et j^2 . Alors, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène $y + y' + y'' = 0$ est $\text{Vect}(x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x})$. Clairement, la fonction $\frac{1}{3} \lambda \exp$ est solution particulière de $(*)$ sur $\mathbb{R}$. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $(*)$ est $\frac{1}{3} \lambda \exp + \text{Vect}(x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x})$.

Ainsi, f est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) si et seulement s'il existe λ, β et γ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{3} \lambda e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2x}.$$

Comme λ est arbitraire, en posant $\alpha = \frac{1}{3} \lambda$,

$$f(x) = \alpha e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2x}.$$

$$\boxed{\text{Finalement, l'ensemble des solutions sur } \mathbb{R} \text{ de } (E_1) \text{ est Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x}).}$$

II.2.1. Le polynôme caractéristique de A est clairement donné par $\chi_A(x) = x^3 - 1$. Il est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable dans } \mathfrak{M}_3(\mathbb{C}).}$$

En revanche, χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable dans } \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).}$$

II.2.2. Diagonalisons A . Un calcul sans difficulté montre que $A = P D P^{-1}$ où $D = \text{diag}(1, j, j^2)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}.$$

Alors d'après le cours, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (S) est

$$\boxed{\text{Vect}(x \mapsto e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \mapsto e^{jx} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}, x \mapsto e^{j^2x} \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}).}$$

II.2.3. Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de (E_1) . Introduisons la fonction vectorielle

$$X = \begin{pmatrix} f \\ f' \\ f'' \end{pmatrix}.$$

Elle est clairement dérivable et

$$X' = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f' \\ f'' \\ f \end{pmatrix} = AX.$$

Donc il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$X = x \mapsto \alpha e^x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^{jx} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix} + \gamma e^{j^2x} \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}.$$

En regardant la première coordonnée, on a donc

$$f = x \mapsto \alpha e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2x}.$$

Réciproquement, une fonction de cette forme vérifie bien $f''' = f$, car $j^3 = 1$. Donc

on retrouve que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) est $\text{Vect}(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{jx}, x \mapsto e^{j^2x})$.

II.3.1. La série entière est lacunaire, c'est-à-dire qu'il n'y a pas toutes les puissances de x . Donc on applique la règle de d'Alembert avec le x : pour $x \neq 0$,

$$\left| \frac{x^{3(n+1)}}{(3(n+1))!} \bigg/ \frac{x^{3n}}{(3n)!} \right| = \frac{|x|^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n \geq 0} x^{3n}/(3n)!$ converge absolument. Puisque c'est vrai pour tout réel x (y compris 0),

le rayon de convergence de la série entière est $+\infty$.

II.3.2. D'après le cours, la somme d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$, donc ici, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

II.3.3. Toujours d'après le cours, les développements en série entière des dérivées de φ s'obtiennent en dérivant successivement celui de φ . Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3nx^{3n-1}}{(3n)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \\ \varphi''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-1)x^{3n-2}}{(3n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}, \\ \varphi'''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n-2)x^{3n-3}}{(3n-2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-3}}{(3n-3)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \varphi(x). \end{aligned}$$

À partir de là, on voit sans difficulté que les choses se répètent, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\varphi^{(3k)} = \varphi, \varphi^{(3k+1)} = \varphi' \text{ et } \varphi^{(3k+2)} = \varphi''.$$

II.3.4. Avec les questions II.1.3 ou II.2.3, il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \alpha e^x + \beta e^{jx} + \gamma e^{j^2x}.$$

Alors en dérivant, sachant que $j^4 = j$,

$$\varphi'(x) = \alpha e^x + j\beta e^{jx} + j^2\gamma e^{j^2x},$$

$$\varphi''(x) = \alpha e^x + j^2\beta e^{jx} + j\gamma e^{j^2x}.$$

En évaluant en 0 ces trois relations, on obtient

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ \alpha + j\beta + j^2\gamma = 0, \\ \alpha + j^2\beta + j\gamma = 0. \end{cases}$$

Nommons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes. Sachant que $1 + j + j^2 = 0$, $L_1 + L_2 + L_3$ devient $3\alpha = 1$ et $\alpha = \frac{1}{3}$. $L_1 + jL_2 + j^2L_3$ devient $3\gamma = 1$ et $\gamma = \frac{1}{3}$. Alors évidemment $\beta = \frac{1}{3}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{3}(e^x + e^{jx} + e^{j^2x}) \\ &= \frac{1}{3}(e^x + e^{(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})x} + e^{(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x}) \\ &= \frac{1}{3}(e^x + e^{-\frac{1}{2}x}(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}x} + e^{-i\frac{\sqrt{3}}{2}x})) \\ &= \frac{1}{3}(e^x + 2e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)). \end{aligned}$$

II.3.5. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+2}}{(3n+2)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!} = \varphi'(x) \\ &= \frac{1}{3}(e^x - e^{-\frac{1}{2}x} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) - \sqrt{3}e^{-\frac{1}{2}x} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x)). \end{aligned}$$

II.3.6. On pourrait tout recommencer, en s'inspirant de la démarche du devoir et des racines sixième de l'unité. Constatons plutôt qu'en séparant les indices pairs et impairs, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{3n}}{(3n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{6n}}{(6n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{6n+3}}{(6n+3)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n+3}}{(6n+3)!}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(x) + \varphi(-x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n+3}}{(6n+3)!} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n+3}}{(6n+3)!} \\ &= 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{6n}}{(6n)!} = 2\theta(x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{1}{2}(\varphi(x) + \varphi(-x)) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + (e^{-\frac{1}{2}x} + e^{\frac{1}{2}x}) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)) \\ &= \frac{1}{3}(\text{ch } x + 2 \text{ch}(\frac{1}{2}x) \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x)). \end{aligned}$$

III.1.1. Soit $y \in \mathcal{S}_\alpha$. Introduisons

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Comme y est $\mathcal{C}^n$, Y est $\mathcal{C}^1$. Alors

$$\begin{aligned} \underline{Y'} &= \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix} = A_\alpha Y. \end{aligned}$$

III.1.2. Soit $y \in \mathcal{S}_\alpha$. Par définition, y est $\mathcal{C}^n$. Alors $y^{(n-1)}$ est $\mathcal{C}^1$, ainsi que les dérivées d'ordre inférieur. Donc $y^{(n)}$ étant combinaison linéaire de ces dérivées, est elle-même $\mathcal{C}^1$. Cela signifie que y est $\mathcal{C}^{n+1}$. Par une récurrence immédiate, $\underline{y}$ est donc $\mathcal{C}^\infty$.

III.1.3. Considérons l'application

$$\Phi : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}), \quad y \mapsto y^{(n)} - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}.$$

Elle est clairement linéaire car la dérivation l'est. Et par construction, l'on voit que $\mathcal{S}_\alpha = \text{Ker } \Phi$. Donc

$$\underline{\mathcal{S}_\alpha \text{ est bien un sous-espace vectoriel de } \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}).}$$

III.1.4. Avec la transformation de la question III.1.1, $\mathcal{S}_\alpha$ est isomorphe à l'ensemble des solutions du système différentiel homogène $Y' = A_\alpha Y$, lequel est de dimension n d'après les cours.

$$\underline{\text{Donc } \dim \mathcal{S}_\alpha = n.}$$

III.2. Ici, $\underline{(E_\alpha) : y^{(n)} = y.}$

III.3. Soit $r \in \mathbb{C}$. L'application $x \mapsto e^{rx}$ est dans $\mathcal{S}_\alpha$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $r^n e^{rx} = e^{rx}$, c'est-à-dire $r^n = 1$ car e^{rx} n'est jamais nulle.

$$\underline{\text{Donc les nombres cherchés sont les racines } n\text{-ièmes de l'unité.}}$$

III.4. Soient donc les n racines n -ièmes de l'unité,

$$r_k = \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right), \quad k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket.$$

D'après la question I.3.2, les fonctions $\psi_k : x \mapsto e^{r_k x}$ forment une famille libre de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. D'après la question précédente, ces fonctions sont dans $\mathcal{S}_\alpha$. Et d'après la question III.1.4, $\dim \mathcal{S}_\alpha = n$. Donc

$$\underline{\text{la famille } (\psi_k)_{0 \leq k \leq n-1} \text{ est une base de } \mathcal{S}_\alpha.}$$

III.5.1. Avec les notations de la question III.1.3 et dans le contexte actuel, pour tout $y \in \mathcal{S}_\alpha$, $\Phi(y) = y^{(n)} - y$ donc $\Phi = d^n - \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}$. Donc Φ est un polynôme en d , donc Φ et d commutent. Alors, le noyau de Φ est stable par d . Donc

$$\underline{d \text{ est bien un endomorphisme de } \mathcal{S}_\alpha.}$$

III.5.2. Mieux, pour tout $y \in \mathcal{S}_\alpha$, $y^{(n)} = y$, donc $d^n = \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}$. Cela signifie que le polynôme $X^n - 1$ est annulateur de d . Parmi ses racines figurent les valeurs propres de d . 0 n'y figure pas, donc 0 n'est pas valeur propre de d , donc $\underline{d}$ est bijectif.

III.5.3. Ledit polynôme annulateur est scindé sur $\mathbb{C}$ à racines simples, donc $\underline{d}$ est diagonalisable.

IV.1. Soient f et g dans $\mathcal{S}_\alpha$.

Pour commencer, l'application

$$h : t \mapsto e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t))$$

est $\mathcal{C}^\infty$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

Admettons avec l'énoncé que $f(t) = O_{t \rightarrow +\infty}(e^t)$. Cela signifie qu'il existe a et M réels tels que pour tout $t \in [a, +\infty[$, $|f(t)| \leq M e^t$. On a donc aussi $|f^{(2p)}(t)| \leq M e^t$ car $f^{(2p)} = f$.

Soit $x \in [a, +\infty[$. Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange sur le segment $[a, x]$ à la fonction $f^{(p)}$ à l'ordre $p-1$ en a :

$$\begin{aligned} & \left| f^{(p)}(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(p+k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| \\ & \leq \frac{(x-a)^p}{p!} \|f^{(2p)}\|_{\infty}^{[a,x]}. \end{aligned}$$

Pour tout $t \in [a, x]$, $|f^{(2p)}(t)| \leq M e^t \leq M e^x$, donc $\|f^{(2p)}\|_{\infty}^{[a,x]} \leq M e^x$. De plus, la somme ci-dessus est un polynôme en x , donc est un $O(e^x)$. On en tire que

$$\begin{aligned} |f^{(p)}(x)| & \leq \left| \sum_{k=0}^{p-1} \frac{f^{(p+k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| + \frac{(x-a)^p}{p!} M e^x \\ & = O(e^x) + O(x^p e^x) = O(x^p e^x). \end{aligned}$$

Il en est de même pour g . Donc quand t est au voisinage de $+\infty$,

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-3|t|} (f(t)g(t) + f^{(p)}(t)g^{(p)}(t)) \\ &= O(e^{-3t} (e^t e^t + t^p e^t t^p e^t)) \\ &= O(e^{-t} (1 + t^{2p})) = O(e^{-t/2} \underbrace{e^{-t/2} (1 + t^{2p})}_{\rightarrow 0}) \\ &= O(e^{-t/2}). \end{aligned}$$

Comme la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, il en est de même pour h .

Par le même procédé, on voit que h est intégrable sur $]-\infty, 0]$.

Ainsi, h est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\underline{(f|g) \text{ a bien un sens.}}$$

IV.2. On a donc prouvé que $(\cdot|\cdot)$ a bien un sens.

Par commutativité du produit des réels, $(\cdot|\cdot)$ est clairement symétrique.

Par linéarité de la dérivation et de l'intégrale, $(\cdot|\cdot)$ est clairement linéaire à gauche (par exemple); et par symétrie, il est bilinéaire.

Soit $f \in \mathcal{S}_\alpha$. Par positivité de l'intégrale, on a

$$(f|f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} \underbrace{(f(t)^2 + f^{(p)}(t)^2)}_{\geq 0} dt \geq 0.$$

Enfin, si $(f|f) = 0$, puisque l'intégrande est positive et continue sur $\mathbb{R}$, elle est nulle : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{-3|t|} (f(t)^2 + f^{(p)}(t)^2) = 0$. En particulier, $f(t)^2 + f^{(p)}(t)^2 = 0$, donc $f(t)^2 = 0$ et $f(t) = 0$.

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est bien un produit scalaire sur $\mathcal{S}_\alpha$.

IV.3. Soient $f_1 \in S_1$ et $f_2 \in S_2$. Par définition, $f_1^{(p)} = f_1$ et $f_2^{(p)} = -f_2$. Alors

$$\begin{aligned} (f_1|f_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} (f_1(t)f_2(t) + f_1^{(p)}(t)f_2^{(p)}(t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3|t|} (f_1(t)f_2(t) - f_1(t)f_2(t)) dt = 0 \end{aligned}$$

donc $S_1 \perp S_2$.

Pour montrer que $\mathcal{S}_\alpha = S_1 + S_2$, on peut raisonner par analyse-synthèse. Ici, introduisons plutôt l'application $\sigma = d^p$, où d est encore la dérivation comme à la question III.5.

Soit $f \in \mathcal{S}_\alpha$. On a $f^{(2p)} = f$, ou encore $d^{2p}(f) = f$, d'où $d^{2p} = \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}$. Cela signifie que $\sigma^2 = \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}$, donc σ est une symétrie de $\mathcal{S}_\alpha$. En conséquence,

$$\mathcal{S}_\alpha = \text{Ker}(\sigma - \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}) \oplus \text{Ker}(\sigma + \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}).$$

Or l'on reconnaît que $\text{Ker}(\sigma - \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}) = S_1$ et $\text{Ker}(\sigma + \text{id}_{\mathcal{S}_\alpha}) = S_2$.

Enfin, S_1 et S_2 sont bien supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{S}_\alpha$.

IV.4.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme le rayon de convergence de la série entière proposée est $+\infty$, on peut dériver terme à terme. Faisons-le quatre fois. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (4n)(4n-1)(4n-2)(4n-3) \frac{x^{4n-4}}{(4n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = f(x). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{S}_4$.

IV.4.2. En exploitant la symétrie $\sigma : f \mapsto f''$ de la question IV.3, on sait que le projeté orthogonal de f sur S_1 est

$$p_{S_1}(f) = \frac{1}{2}(f + \sigma(f)) = \frac{1}{2}(f + f'').$$

De même, le projeté orthogonal de f sur S_2 est

$$p_{S_2}(f) = \frac{1}{2}(f - \sigma(f)) = \frac{1}{2}(f - f'').$$

IV.4.3. Pour alléger, notons $f_1 = p_{S_1}(f)$. Comme $f_1 \in S_1$, $f_1'' = f_1$ donc il existe α et β réels tels que $f_1 = \alpha \text{ch} + \beta \text{sh}$. Mais f est paire, donc f'' l'est aussi, donc f_1 est paire. Ainsi, $\beta = 0$ et $f_1 = \alpha \text{ch}$.

De façon analogue, si $f_2 = p_{S_2}(f)$, $f_2'' = -f_2$ donc il existe γ et δ réels tels que $f_2 = \gamma \cos + \delta \sin$. Pour la même raison de parité, $\delta = 0$ et $f_2 = \gamma \cos$.

Alors $f = \alpha \text{ch} + \gamma \cos$. Avec le développement en série entière de f , on voit que $f(0) = 1$ et $f''(0) = 0$ donc $\alpha + \gamma = 1$ et $\alpha - \gamma = 0$, d'où $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$.

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\text{ch } x + \cos x).$$