Vingt-sixième devoir à la maison

[CCP18]

Durée 4 h

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de 2 problèmes indépendants.

PROBLÈME 1

Ce problème comporte 3 parties indépendantes.

Notations et définitions

- $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des entiers naturels non nuls.
- $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- $\mathbf{R}[X]$ désigne le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{R}_n[X]$ le $\mathbf{R}$ -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .
- Si n_1 et n_2 sont deux entiers naturels, on note $\llbracket n_1, n_2 \rrbracket$ l'ensemble des entiers naturels compris (au sens large) entre n_1 et n_2 .

Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à l'équation différentielle $x^2 y'' + axy' + by = 0$. La **partie I** est une partie d'algèbre qui traite des solutions polynomiales de cette équation lorsque a et b sont des constantes réelles. Dans la **partie II**, on détermine l'ensemble des solutions de l'équation lorsque a et b sont des constantes réelles. La **partie III** traite des solutions de cette équation lorsque $a = 1$ et b est la fonction carrée.

PARTIE I - ENDOMORPHISMES

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et a et b des constantes réelles.

Q1. On note Δ l'endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Delta(P) = XP'.$$

Calculer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\Delta(X^k)$.

Q2. Montrer que pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, $X^2 P'' = \Delta \circ (\Delta - \text{Id})(P)$, où Id désigne l'endomorphisme identité sur $\mathbf{R}[X]$.

Q3. Montrer que si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, $\Delta(P) \in \mathbf{R}_n[X]$.

On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$ induit par Δ .

Q4. Déterminer la matrice de Δ_n dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q5. On définit l'application Φ par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \Phi(P) = X^2 P'' + aXP'.$$

Montrer que $\Phi = \Delta^2 + (a-1)\Delta$ et en déduire que Φ définit un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q6. Montrer que Φ induit un endomorphisme Φ_n de $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. Montrer que Φ_n est diagonalisable.

On considère l'endomorphisme φ de $\mathbf{R}[X]$ défini par :

$$\forall P \in \mathbf{R}[X], \varphi(P) = X^2 P'' + aXP' + bP.$$

Q8. Montrer que φ induit un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$, endomorphisme que l'on notera φ_n .

Exprimer φ_n en fonction de Δ_n .

Q9. Exprimer la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.

On considère l'équation :

$$(1) \quad s^2 + (a-1)s + b = 0.$$

Q10. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet deux racines entières distinctes m_1, m_2 dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

Q11. Expliciter le noyau de φ_n lorsque l'équation (1) admet une unique racine entière $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Q12. Déterminer le noyau de φ . En déduire qu'il est de dimension finie et déterminer sa dimension.

PARTIE II - UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

On considère dans cette partie l'équation différentielle

$$(2) \quad x^2 y'' + axy' + by = 0,$$

où a et b sont des constantes réelles.

Q13. Que déduit-on du théorème de Cauchy quant à la structure de l'ensemble des solutions de l'équation (2) sur $I =]0, +\infty[$? Et sur $J =]-\infty, 0[$?

Q14. Montrer que si y est une solution de (2) sur I , alors $g = y \circ \exp$ est une solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$(3) \quad u'' + (a - 1)u' + bu = 0.$$

Q15. Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de (3) sur $\mathbf{R}$. Montrer que la fonction $g \circ \ln$ est solution de (2) sur I .

Q16. Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (3) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$. En déduire, dans chacun des cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (2) sur l'intervalle I .

On suppose dans les deux questions suivantes uniquement que $a = 1$ et $b = -4$.

Q17. Montrer que si y est solution de (2) sur J , alors $h = y \circ (-\exp)$ est solution de (3) sur $\mathbf{R}$.

Q18. Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (2) de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

PARTIE III - UNE ÉQUATION DE BESSEL

On se propose dans cette partie d'étudier l'équation différentielle :

$$(4) \quad x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0.$$

Q19. Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière.

Série entière dont la somme est solution de (4).

On suppose qu'il existe une série entière $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$, avec $c_0 = 1$, de rayon de convergence $R > 0$ et dont la fonction somme J_0 est solution de (4) sur $] -R, R[$.

Q20. Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, on a :

$$\begin{cases} c_{2k+1} &= 0 \\ c_{2k} &= \frac{(-1)^k}{4^k (k!)^2}. \end{cases}$$

Q21. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière obtenue : $\sum_{k \geq 0} c_k x^k$.

Q22. Soit $r > 0$ et soit f une autre solution de (4) sur $]0, r[$. Montrer que si (J_0, f) est liée dans l'espace vectoriel des fonctions de classe C^2 sur $]0, r[$, alors f est bornée au voisinage de 0.

Inverse d'une série entière non nulle en 0

Soit $\sum_{k \geq 0} \alpha_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R_\alpha > 0$ telle que $\alpha_0 = 1$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer l'existence et l'unicité d'une série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ de rayon de convergence $R_\beta > 0$ telle que pour tout x appartenant aux domaines de convergence des deux séries :

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k x^k \right) \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k x^k \right) = 1.$$

Q23. Montrer que si $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$ est solution, alors la suite $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ satisfait aux relations suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \beta_{n-k} = 0. \end{cases}$$

Soit r un réel tel que $0 < r < R_\alpha$.

Q24. Montrer qu'il existe un réel $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$:

$$|\alpha_k| \leq \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Montrer que (5) admet une unique solution $(\beta_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$|\beta_k| \leq \frac{M(M+1)^{k-1}}{r^k}.$$

On pourra raisonner par récurrence.

Q26. Que peut-on dire du rayon de convergence R_β de la série entière $\sum_{k \geq 0} \beta_k x^k$?

Ensemble des solutions de (4)

Q27. Soit $r > 0$ et soit λ une fonction de classe C^2 sur $]0, r[$.

Montrer que la fonction $y : x \mapsto \lambda(x) J_0(x)$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si la fonction $x \mapsto x J_0^2(x) \lambda'(x)$ est de dérivée nulle sur $]0, r[$.

Q28. Montrer que J_0^2 est somme d'une série entière dont on donnera le rayon de convergence. Que vaut $J_0^2(0)$?

Q29. En déduire l'existence d'une fonction η somme d'une série entière de rayon de convergence $R_\eta > 0$ telle que :

$$x \mapsto \eta(x) + J_0(x) \ln(x)$$

soit solution de (4) sur un intervalle $]0, R_\eta[$.

Q30. En déduire l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$.

PROBLÈME 2

Notations et définitions

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{R}$ désigne celui des nombres réels.

— Si X est une variable aléatoire admettant une espérance, on note $\mathbf{E}(X)$ cette espérance.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, à valeurs dans $[-1, 1]$. On considère dans ce problème une suite $(X_i)_{i \in \mathbf{N}^*}$ de variables aléatoires *discrètes* sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, *mutuellement indépendantes et de même loi que X* . Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Objectif

Montrer que si la variable aléatoire X est centrée ($\mathbf{E}(X) = 0$), alors la suite $(S_n)_{n \geq 1}$ converge presque-surement vers la constante 0. Il s'agit d'un cas particulier de la loi forte des grands nombres.

Q31. On ne suppose pas X centrée dans cette question. Montrer que X admet une espérance.

On suppose désormais que X est *centrée*.

Q32. Énoncer et démontrer l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire finie Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Montrer que ce résultat est encore vrai lorsque Y est une variable aléatoire discrète non nécessairement finie.

Q33. En déduire que, pour tout $\alpha > 0$:

$$\mathbf{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Montrer que, pour tout $t > 0$, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{tnS_n} \geq e^{tn\varepsilon}) \leq \frac{(\mathbf{E}(e^{tX}))^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Majoration de $\mathbf{E}(e^{tX})$

Q35. Soit $a > 1$. On considère la fonction g_a définie par

$$\forall x \in \mathbf{R}, g_a(x) = \frac{1-x}{2} a^{-1} + \frac{1+x}{2} a - a^x.$$

Montrer que la fonction g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que la fonction g'_a est décroissante sur $\mathbf{R}$. En déduire, en remarquant que $g_a(-1) = g_a(1) = 0$, que pour tout $x \in [-1, 1]$, $g_a(x) \geq 0$.

Q36. En déduire que pour tout $t > 0$ et pour tout $x \in [-1, 1]$ on a :

$$e^{tx} \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{1+x}{2} e^t.$$

Q37. En déduire que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq \text{ch}(t).$$

Q38. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbf{N}$ et tout $t \in \mathbf{R}$, on a :

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leq \frac{1}{k!} \left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

En déduire que pour tout $t > 0$, on a :

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}.$$

Majoration de $\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon)$

Dans ce paragraphe, on considère un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et un réel $\varepsilon > 0$.

Q39. Montrer que la fonction

$$t \in \mathbf{R} \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$$

atteint un minimum en un point que l'on précisera.

Q40. En déduire que $\mathbf{P}(S_n \geq \varepsilon) \leq e^{-n\varepsilon^2/2}$, puis que :

$$\mathbf{P}(|S_n| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Conclusion

Q41. Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, la série de terme général $\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon)$ converge.

Q42. On fixe un réel $\varepsilon > 0$. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$:

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} \{\omega \in \Omega; |S_m(\omega)| > \varepsilon\}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $B_n(\varepsilon)$ est un évènement et que :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n \in \mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.$$

Q43. Posons, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$:

$$\Omega_k = \left\{ \omega \in \Omega; \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geq n, |S_m(\omega)| \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, Ω_k est un évènement.

Écrire l'ensemble

$$A = \left\{ \omega \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(\omega) = 0 \right\}$$

à l'aide des évènements Ω_k , $k \in \mathbf{N}^*$. En déduire que A est un évènement.

Q44. Déduire des questions précédentes que :

$$\mathbf{P}(A) = 1.$$