Corrigé du vingt-sixième devoir à la maison

Q1. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. On a $\Delta(1) = 0$ et si $k \geqslant 1$,

$$\Delta(X^k) = X\,k\,X^{k-1} = k\,X^k.$$

Commentaire. Constatons que ce dernier résultat est encore valide pour $k=0$.

Q2. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. On a

$$(\Delta - \mathrm{Id})(P) = \Delta(P) - P = X\,P' - P,$$

donc

$$\begin{aligned}\Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) &= \Delta(X\,P' - P) = X\,(X\,P' - P)' \\ &= X\,(X\,P'' + P' - P') = X^2\,P''.\end{aligned}$$

Q3. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k$ dans $\mathbf{R}_n[X]$. Alors

$$\Delta(P) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,\Delta(X^k) = \sum_{k=0}^{n} k\,a_k\,X^k \in \mathbf{R}_n[X].$$

Q.4. D'après la question 1,

la matrice cherchée est $D_n = \mathrm{diag}(0,1,2,\dots,n)$.

Q5. Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Calculons :

$$\begin{aligned}\Phi(P) &= X^2\,P'' + a\,X\,P' \\ &= \Delta \circ (\Delta - \mathrm{Id})(P) + a\,\Delta(P) \\ &= (\Delta^2 - \Delta)(P) + a\,\Delta(P) \\ &= (\Delta^2 - \Delta + a\,\Delta)(P) \\ &= (\Delta^2 + (a-1)\,\Delta)(P).\end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$,

$\Phi = \Delta^2 + (a-1)\,\Delta$.

Ainsi, comme polynôme en Δ,

Φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}[X]$.

Q6. Comme $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par Δ, il l'est aussi par Φ.

Donc Φ induit un endomorphisme Φ_n sur $\mathbf{R}_n[X]$.

Q7. Nommons $Q = X^2 + (a-1)\,X$, de sorte que $\Phi = Q(\Delta)$, donc aussi $\Phi_n = Q(\Delta_n)$. Alors, la matrice de Φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est

$$Q(D_n) = \mathrm{diag}(Q(0), Q(1), Q(2), \dots, Q(n)).$$

Elle est diagonale, donc Φ_n est diagonalisable.

Q8. Oui, car $\varphi = \Phi + b\,\mathrm{Id}$ et que $\mathbf{R}_n[X]$ est stable par Φ, et bien-sûr par Id. En passant, en notant Id_n l'identité de $\mathbf{R}_n[X]$, $\varphi_n = \Phi_n + b\,\mathrm{Id}_n$, donc

$$\varphi_n = \Delta_n^2 + (a-1)\,\Delta_n + b\,\mathrm{Id}_n.$$

Q9. Alors, la matrice de φ_n dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$ est

$R(D_n) = \mathrm{diag}(R(0), R(1), \dots, R(n))$, en posant $R = X^2 + (a-1)\,X + b$.

Q10. Avec cette notation, l'équation (1) s'écrit $R(s) = 0$. De plus, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\varphi_n(X^k) = R(k)\,X^k.$$

Supposons que R admette deux racines distinctes m_1 et m_2 dans $[\![0,n]\!]$. Soit alors $P \in \operatorname{Ker}\varphi_n$. En écrivant

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k\,X^k,$$

on a

$$\begin{aligned}\varphi_n(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k\,\varphi_n(X^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k\,R(k)\,X^k \\ &= \sum_{\substack{k=0\\ k\neq m_1\\ k\neq m_2}}^{n} a_k\,R(k)\,X^k = 0,\end{aligned}$$

donc, pour tout $k \in [\![0,n]\!] \smallsetminus \{m_1, m_2\}$, $a_k\,R(k) = 0$, donc $a_k = 0$ car $R(k) \neq 0$. Ainsi,

$$P = a_{m_1}\,X^{m_1} + a_{m_2}\,X^{m_2} \in \mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2}),$$

et

$$\operatorname{Ker}\varphi_n \subset \mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2}).$$

Réciproquement, comme $\varphi_n(X^{m_1}) = \varphi_n(X^{m_2}) = 0$,

$$\mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2}) \subset \operatorname{Ker}\varphi_n.$$

Ainsi, $\operatorname{Ker}\varphi_n = \mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$.

Q11. Si R n'admet qu'une solution $m \in [\![0,n]\!]$, le même raisonnement s'applique et

$\operatorname{Ker}\varphi_n = \mathrm{Vect}(X^m)$.

Q12. Soit $P \in \operatorname{Ker}\varphi$. En écrivant

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,X^k,$$

et sachant que la somme est en réalité *finie*, on a

$$\varphi(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\,R(k)\,X^k.$$

Avec le même principe que plus haut, si l'équation (1) admet deux racines entières distinctes, m_1 et m_2, $\operatorname{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}(X^{m_1}, X^{m_2})$: il est bien de dimension finie, et c'est un plan vectoriel.

Si l'équation (1) admet une unique racine entière, m, $\operatorname{Ker}\varphi = \mathrm{Vect}(X^m)$: c'est une droite vectorielle.

Enfin, si l'équation (1) n'admet aucune racine entière, $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$.

Q13. L'intervalle I ne contient pas 0 qui est la seule singularité de (2), donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz,

l'ensemble des solutions de (2) sur I est un plan vectoriel.

Il en est de même pour J, qui ne contient pas non plus 0.

Q14. Soit y une solution de (2) sur I. Par définition, pour tout $x \in I$,

$$x^2 y''(x) + a\,x\,y'(x) + b\,y(x) = 0. \tag{2 bis}$$

Pour tout $x \in I$, $x > 0$, donc $t = \ln x$ est bien défini. Quand x décrit I, t décrit $\mathbf{R}$ et l'on a $x = e^t$. En substituant $x = e^t$ dans (2 bis), on obtient

$$e^{2t} y''(e^t) + a\,e^t y'(e^t) + b\,y(e^t) = 0. \tag{2 ter}$$

Introduisons $g = y \circ \exp : t \mapsto y(e^t)$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g'(t) = e^t y'(e^t) \text{ et } g''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t).$$

Alors,

$$\begin{aligned} &g''(t) + (a-1)\,g'(t) + b\,g(t) \\ &= e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t) + (a-1)\,e^t y'(e^t) + b\,y(e^t) \\ &= e^{2t} y''(e^t) + a\,e^t y'(e^t) + b\,y(e^t) = 0, \end{aligned}$$

grâce à (2 ter).

Ainsi, g est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation (3).

Q15. Soit g une solution de (3) sur $\mathbf{R}$. Par définition, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$g''(t) + (a-1)\,g'(t) + b\,g(t) = 0. \tag{3 bis}$$

Quand t décrit $\mathbf{R}$, $x = e^t$ décrit I et l'on a $t = \ln x$. En substituant $t = \ln x$ dans (3 bis), on obtient

$$g''(\ln x) + (a-1)\,g'(\ln x) + b\,g(\ln x) = 0. \tag{3 ter}$$

Introduisons $y = g \circ \ln : x \mapsto g(\ln x)$. Pour tout $x \in I$,

$$y'(x) = \frac{g'(\ln x)}{x} \text{ et } y''(x) = \frac{g''(\ln x)}{x^2} - \frac{g'(\ln x)}{x^2}.$$

Alors

$$\begin{aligned} &x^2 y''(x) + a\,x\,y'(x) + b\,y(x) \\ &= g''(\ln x) - g'(\ln x) + a\,g'(\ln x) + b\,g(\ln x) \\ &= g''(\ln x) + (a-1)\,g'(\ln x) + b\,g(\ln x) = 0, \end{aligned}$$

grâce à (3 ter).

Ainsi, y est solution sur I de l'équation (2).

Q16. CAS OÙ $a = 3$ ET $b = 1$. L'équation (3) s'écrit

$$u'' + 2\,u' + u = 0. \tag{3}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du second ordre à coefficients constants. Son équation caractéristique est $r^2 + 2\,r + 1 = 0$, qui admet -1 comme racine double. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de (3) est

$$\mathscr{S}_{\mathbf{R}}(3) = \left\{t \mapsto (\alpha\,t + \beta)\,e^{-t},\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Avec les questions précédentes, on en tire que l'ensemble des solutions sur I de (2) est

$$\mathscr{S}_I(2) = \left\{x \mapsto \frac{\alpha \ln x + \beta}{x},\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

CAS OÙ $a = 1$ ET $b = 4$. L'équation (3) s'écrit

$$u'' + 4\,u = 0. \tag{3}$$

Son équation caractéristique est $r^2 + 4 = 0$, qui admet $\pm 2\,i$ comme racines. Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de (3) est

$$\mathscr{S}_{\mathbf{R}}(3) = \left\{t \mapsto \alpha \cos(2\,t) + \beta \sin(2\,t),\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Avec les questions précédentes, on en tire que l'ensemble des solutions sur I de (2) est

$$\mathscr{S}_I(2) = \left\{x \mapsto \alpha \cos(2 \ln x) + \beta \sin(2 \ln x),\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Q17. Ici, $a = 1$ et $b = -4$. Les équations sont respectivement

$$x^2 y''(x) + x\,y'(x) - 4\,y(x) = 0, \tag{2}$$

$$u'' - 4\,u = 0. \tag{3}$$

Recommençons comme en 14 :-) Soit y une solution de (2) sur J. Pour tout $x \in J$,

$$x^2 y''(x) + x\,y'(x) - 4\,y(x) = 0. \tag{2 bis}$$

Pour tout $x \in J$, $x < 0$, donc $t = \ln(-x)$ est bien défini. Quand x décrit J, t décrit $\mathbf{R}$ et l'on a $x = -e^t$. En substituant $x = -e^t$ dans (2 bis), on obtient

$$e^{2t} y''(-e^t) - e^t y'(-e^t) - 4\,y(-e^t) = 0. \tag{2 ter}$$

Soit $h = y \circ (-\exp) : t \mapsto y(-e^t)$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} h'(t) &= -e^t y'(-e^t) \\ \text{et } h''(t) &= -e^t y'(-e^t) + e^{2t} y''(-e^t). \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} &h''(t) - 4\,h(t) \\ &= -e^t y'(-e^t) + e^{2t} y''(-e^t) - 4\,y(-e^t) = 0, \end{aligned}$$

grâce à (2 ter).

Ainsi, h est solution sur $\mathbf{R}$ de l'équation (3).

Q18. Procédons comme dans la question Q16. L'équation caractéristique de (3) est $r^2 - 4 = 0$, dont les racines sont ± 2. Alors,

$$\mathscr{S}_{\mathbf{R}}(3) = \left\{t \mapsto \alpha\,e^{2t} + \beta\,e^{-2t},\ (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Donc d'une part, en posant $x = e^t$ avec la question 15,

$$\mathscr{S}_I(2) = \left\{x \mapsto \alpha\,x^2 + \frac{\beta}{x^2}, (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\},$$

et d'autre part, en posant $x = -e^t$ avec la question 17,

$$\mathscr{S}_J(2) = \left\{x \mapsto \alpha\,x^2 + \frac{\beta}{x^2}, (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2\right\}.$$

Cherchons une éventuelle solution φ de (2) sur $\mathbf{R}$ en raisonnant par analyse-synthèse.

Analyse. En faisant $x = 0$ dans (2), on a $\varphi(0) = 0$.

Par ailleurs, $\varphi|_I \in \mathscr{S}_I(2)$, donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $x \in I$, $\varphi(x) = \alpha\,x^2 + \beta/x^2$. Comme φ est deux fois dérivable, elle est en particulier continue en 0, donc on doit avoir

$$\lim_{x \to 0^+} \varphi(x) = \varphi(0) = 0,$$

ce qui n'est possible que si $\beta = 0$ — sinon, $\varphi(x)$ tend vers $\operatorname{sgn}(\beta)\infty$ quand $x \to 0^+$.

Sur le même principe, $\varphi|_J \in \mathscr{S}_J(2)$, donc il existe $(\gamma, \delta) \in \mathbf{R}^2$ tel que pour tout $x \in J$, $\varphi(x) = \gamma\,x^2 + \delta/x^2$, et l'on doit avoir $\delta = 0$.

Ainsi, si φ existe, elle doit être définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} \alpha\,x^2 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ \gamma\,x^2 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

où $(\alpha, \gamma) \in \mathbf{R}^2$.

Puisque φ est solution d'une équation différentielle d'ordre 2, par nature elle est deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$. Alors elle admet en 0 un développement limité à l'ordre 2 : pour x proche de 0,

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\,x + \tfrac{1}{2}\,\varphi''(0)\,x^2 + \mathrm{o}(x^2).$$

Or, avec la construction précédente,

$$\forall x > 0,\ \ \varphi(x) = \alpha\,x^2 \text{ et } \forall x < 0, \varphi(x) = \gamma\,x^2.$$

Par unicité du développement limité de φ en 0, on en tire que $\varphi(0) = 0$, ce que l'on savait déjà, que $\varphi'(0) = 0$ et que $\varphi''(0) = 2\,\alpha = 2\,\gamma$. Donc $\alpha = \gamma$.

Pour finir, si φ existe, elle s'écrit

$$\varphi : x \mapsto \alpha\,x^2,$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$.

Synthèse. À l'évidence, les fonctions $x \mapsto \alpha\,x^2$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, ce qui valide la synthèse.

Ainsi, l'ensemble des solutions sur $\mathbf{R}$ de (2) est

$$\mathscr{S}_{\mathbf{R}}(2) = \big\{x \mapsto \alpha\,x^2,\ \alpha \in \mathbf{R}\big\}.$$

Q19. Voir le cours :-)

Q20. En reportant dans (4), pour tout $x \in\,]-R, R[$,

$$\begin{aligned}
& x^2 \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\,c_k\,x^{k-2} + x \sum_{k=1}^{+\infty} k\,c_k\,x^{k-1} \\
& \qquad + x^2 \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,x^k = 0 \\
\iff\ & \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\,c_k\,x^k + \sum_{k=1}^{+\infty} k\,c_k\,x^k \\
& \qquad + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,x^{k+2} = 0 \\
\iff\ & \sum_{k=2}^{+\infty} k\,(k-1)\,c_k\,x^k + \sum_{k=2}^{+\infty} k\,c_k\,x^k + c_1\,x \\
& \qquad + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{k-2}\,x^k = 0 \\
\iff\ & \sum_{k=2}^{+\infty} (k^2\,c_k + c_{k-2})\,x^k + c_1\,x = 0
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, $c_1 = 0$ et pour tout $k \geqslant 2$,

$$k^2\,c_k + c_{k-2} = 0.$$

Alors, par une récurrence immédiate, puisque $c_0 = 1$, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c_{2k} \neq 0$, et puisque $c_1 = 0$,

pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c_{2k+1} = 0$.

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On a

$$\frac{c_{2k}}{c_{2k-2}} = -\frac{1}{(2\,k)^2} = -\frac{1}{4\,k^2}.$$

Alors, en multipliant membre à membre,

$$\frac{c_{2k}}{c_0} = \prod_{j=1}^{k} \frac{c_{2j}}{c_{2j-2}} = \prod_{j=1}^{k} \left(-\frac{1}{4\,j^2}\right) = \frac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}.$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $c_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{4^k\,(k!)^2}$.

Q21. La série entières $\sum_{k \geqslant 0} c_k\,x^k$ est lacunaire, donc on applique la règle de d'Alembert avec le x : pour $x \neq 0$ et $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\left|\frac{c_{2k}\,x^{2k}}{c_{2k-2}\,x^{2k-2}}\right| = \frac{x^2}{4\,k^2} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0,$$

donc $\sum_{k \geqslant 0} c_k\,x^k$ converge absolument pour tout $x \in \mathbf{R}$ — bien-sûr 0 ne pose pas de problème de convergence :-), ce qui signifie que $R = +\infty$.

Q22. Dans le contexte de l'énoncé, dire que J_0 et f sont liées entraine que l'on peut écrire $f = \lambda\,J_0$ car J_0 n'est pas la fonction nulle sur $]0, r[$. En effet, Puisque $J_0(0) = 1$ et que J_0 est continue — et même de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ comme somme d'une série entière, il existe $s \in\,]0, r[$ tel que $J_0 > 0$ sur $]0, s[$. Alors, f tend vers λ en 0, donc elle est bornée au voisinage de 0.

Q23. Supposons que $\sum_{k \geqslant 0} \beta_k\,x^k$ réponde au problème. D'après le théorème du produit de Cauchy, pour tout $|x| < \min(R_\alpha, R_\beta)$, les deux séries entières $\sum_{k \geqslant 0} \alpha_k\,x^k$ et $\sum_{k \geqslant 0} \beta_k\,x^k$ convergent absolument, donc leur produit de Cauchy également et l'on a

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k\,x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \beta_k\,x^k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,\beta_{n-k}\right) x^n.$$

Or par hypothèse, ce produit vaut 1. Donc, par unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1$, on en tire d'une part que $\alpha_0\,\beta_0 = 1$, soit $\beta_0 = 1$, et d'autre part,

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\,\beta_{n-k} = 0.$$

Q24. Soit $0 < r < R_\alpha$. On sait que $\sum_{k \geqslant 0} \alpha_k\,r^k$ converge absolument, donc la suite $(\alpha_k\,r^k)_{k \geqslant 0}$ converge vers 0 : en particulier, elle est bornée, donc il existe $M > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbf{N}$, $|\alpha_k\,r^k| \leqslant M$, ou encore

$$\exists M > 0, \forall k \in \mathbf{N},\ |\alpha_k| \leqslant \frac{M}{r^k}.$$

Q25. Les relations (5) s'écrivent aussi

$$\begin{cases} \beta_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbf{N}^*,\ \beta_n = -\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\,\beta_{n-k}, \end{cases}$$

où la seconde relation exprime β_n en fonction des β_0, β_1, …, β_{n-1}. Alors, d'après le principe de récurrence,

il existe une unique suite $(\beta_k)_{k \geqslant 0}$ vérifiant (5).

Prouvons la majoration demandée par récurrence.

Par construction, $\beta_1 = -\alpha_1$, donc

$$|\beta_1| = |\alpha_1| \leqslant \frac{M}{r} = \frac{M\,(M+1)^{1-1}}{r^1}.$$

La majoration est initialisée.

Supposons, pour un entier $n \geqslant 2$, que la majoration soit valide pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$. Alors

$$\begin{aligned}|\beta_n| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|\,|\beta_{n-k}| \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{M}{r^k}\, \frac{M\,(M+1)^{n-k-1}}{r^{n-k}} \\ &= \frac{M^2}{(M+1)\,r^n} \sum_{j=0}^{n-1} (M+1)^j \qquad (j = n-k) \\ &= \frac{M^2}{(M+1)\,r^n}\, \frac{(M+1)^n - 1}{(M+1)-1} \\ &\leqslant \frac{M}{(M+1)\,r^n}\,(M+1)^n = \frac{M\,(M+1)^{n-1}}{r^n}.\end{aligned}$$

Ainsi, la majoration se transmet au rang n.

Par le principe de récurrence, la majoration annoncée est vraie.

Q26. Soient $x \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}^*$. On a

$$|\beta_k\, x^k| \leqslant \frac{M}{M+1} \left(\frac{(M+1)\,|x|}{r} \right)^k.$$

Pour tout x tel que $|x| < r/(M+1)$, $(M+1)\,|x|/r < 1$ donc la série géométrique de raison $(M+1)\,|x|/r$ converge absolument, donc aussi la série $\sum_{k\geqslant 0} \beta_k\, x^k$, donc $R_\beta \geqslant r/(M+1)$. Comme M dépend de r, tout ce qu'il est raisonnable d'en tirer est que

$R_\beta > 0.$

Q27. Comme λ et J_0 sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0, r[$, y l'est aussi. Pour simplifier les écritures, notons $i : x \mapsto x$. Sur $]0, r[$ où i ne s'annule pas,

$$\begin{aligned}(4) &\iff i^2\,(\lambda\, J_0)'' + i\,(\lambda\, J_0)' + i^2\,(\lambda\, J_0) = 0 \\ &\iff i^2\,(\lambda''\, J_0 + 2\,\lambda'\, J_0' + \lambda\, J_0'') \\ &\qquad + i\,(\lambda'\, J_0 + \lambda\, J_0') + i^2\,\lambda\, J_0 = 0 \\ &\iff i^2\, J_0\, \lambda'' + i\,(2\,i\, J_0' + J_0)\,\lambda' \\ &\qquad + \underbrace{(i^2\, J_0'' + i\, J_0' + i^2\, J_0)}_{0}\,\lambda = 0 \\ &\iff i\, J_0\, \lambda'' + (2\,i\, J_0' + J_0)\,\lambda' = 0.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 en λ'. Pour la résoudre, d'après le cours, il faut se placer sur un intervalle qui ne contient pas de singularité, c'est-à-dire où J_0 ne s'annule pas, puisque i, elle, ne s'annule pas. Supposons donc que J_0 ne s'annule pas sur $]0, r[$, autrement dit choisissons r pour ce soit le cas. C'est possible car $J_0(0) = 1$, donc par continuité, J_0 ne s'annule pas au voisinage de 0. Alors, en multipliant par J_0,

$$\begin{aligned}(4) &\iff i\, J_0^2\, \lambda'' + (2\,i\, J_0'\, J_0 + J_0^2)\,\lambda' = 0 \\ &\iff i\, J_0^2\, \lambda'' + (i\, J_0^2)'\,\lambda' = 0 \\ &\iff (i\, J_0^2\, \lambda')' = 0.\end{aligned}$$

Finalement, en choisissant $r > 0$ tel que J_0 ne s'annule pas sur $]0, r[$, $y = \lambda\, J_0$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement si $i\, J_0^2\, \lambda'$ y est de dérivée nulle, donc y est constante.

Commentaire. On aura bien-sûr reconnu la méthode de variation de la constante.

Q28. Comme J_0 est développable en série entière sur $\mathbf{R}$, d'après le théorème du produit de Cauchy déjà évoqué, J_0^2 l'est aussi, et son développement en série entière est le produit de Cauchy de celui de J_0 par lui-même. En outre $J_0^2(0) = 1.$

Q29. D'après la question Q9, $y = \lambda\, J_0$ est solution de (4) sur $]0, r[$ si et seulement s'il existe une constante $a \in \mathbf{R}$ telle que $i\, J_0^2\, \lambda' = a$, ou encore $\lambda' = \dfrac{a}{i\, J_0^2}$.

D'après la question Q8, puisque $J_0^2(0) = 1$, la fonction $1/J_0^2$ est développable en série entière autour de 0, sous la forme

$$\frac{1}{J_0^2(x)} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k\, x^k = 1 + x \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k\, x^{k-1} = 1 + x\,\gamma(x),$$

où γ est une fonction développable en série entière autour de 0. Comme $R_\beta > 0$, $R_\gamma > 0$, avec des notations évidentes inspirées de l'énoncé.

Ainsi,

$$\lambda' = \frac{a}{i}\,(1 + i\,\gamma) = a\left(\frac{1}{i} + \gamma\right).$$

Puisque γ est développable en série entière, ses primitives le sont aussi : notons δ celle d'entre elles qui s'annule en 0. Il existe donc $b \in \mathbf{R}$ tel que

$$\lambda = a\,(\ln + \delta) + b$$

et

$$y = a\, J_0 \ln\, + J_0\,(a\,\delta + b).$$

Comme on cherche une solution de (4), on peut choisir arbitrairement $a = 1$ et $b = 0$: où l'on voit que

$$y = J_0 \ln\, + J_0\, \delta$$

est solution de (4). Comme J_0 et δ sont développables en série entière, leur produit $\eta = J_0\, \delta$ l'est aussi.

Finalement, il existe une fonction η développable en série entière, avec $R_\eta > 0$, telle que $\eta + J_0 \ln$ soit solution de (4) sur $]0, R_\eta[$.

Commentaire. À vrai dire, il faudrait se placer sur $]0, \min(R_\eta, r)[$, mais on n'est plus à une approximation près, cette question est de toute façon très acrobatique.

Q30. Quand x tend vers 0, $\eta(x) + J_0(x)\ln(x) \sim \ln(x)$ car $J_0(0) = 1$ et $\eta(x) \to \eta(0)$. Donc la solution que l'on vient d'exhiber n'est pas bornée au voisinage de 0. D'après la contraposée de la question Q22, il s'ensuit qu'elle forme une famille libre avec J_0. Or, sur $]0, R_\eta[$, l'ensemble des solutions de (4) est un plan vectoriel : il est donc engendré par cette famille libre.

Ainsi, l'ensemble des solutions de (4) sur $]0, R_\eta[$ est $\mathrm{Vect}(J_0, \eta + J_0 \ln)$.

Q31. La variable aléatoire X admet une espérance si la série $\sum_{x \in X(\Omega)} x\, \mathbf{P}(X = x)$ converge absolument. Or $X(\Omega) \subset [-1, 1]$, donc pour tout $x \in X(\Omega)$, $|x\mathbf{P}(X = x)| \leqslant \mathbf{P}(X = x)$. Ce majorant est terme d'une série convergente, donc $\sum_{x\in X(\Omega)} x\,\mathbf{P}(X = x)$ converge absolument et X admet une espérance.

Plus généralement, si Y est une variable aléatoire réelle discrète bornée, elle admet une espérance.

En effet, s'il existe $m \in \mathbf{R}_+$ tel que $|Y| \leqslant m$, alors pour tout $y \in Y(\Omega)$, $|y\mathbf{P}(Y=y)| \leqslant m\mathbf{P}(Y=y)$, donc la série $\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(Y=y)$ converge absolument et Y admet une espérance.

Q32. C'est une question de cours, donc voir le cours.

Q33. La variable aléatoire $|X|$ est positive et admet une espérance — puisque X en admet une, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Markov :

$$\forall \alpha > 0,\ \mathbf{P}(|X| \geqslant \alpha) \leqslant \frac{\mathbf{E}(|X|)}{\alpha}.$$

Q34. Soient $t > 0$, $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}^*$.

L'application $u \mapsto e^{tnu}$ est une bijection croissante de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+^*$, donc $e^{tnS_n} > 0$. De plus, les évènements $(S_n \geqslant \varepsilon)$ et $(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon})$ sont les mêmes et

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}).$$

Par ailleurs,

$$e^{tnS_n} = \exp\left(t\sum_{i=1} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}.$$

Les X_i ont la même loi que X, donc les e^{tX_i} ont la même loi que e^{tX}. Comme X est bornée dans $[-1,1]$, e^{tX} est bornée dans $[e^{-t}, e^t]$. D'après la (généralisation de la) question 31, e^{tX} admet une espérance. De plus, les X_i sont mutuellement indépendantes, donc les e^{tX_i} le sont aussi. Alors $e^{tnS_n} = \prod_{i=1}^n e^{tX_i}$ admet une espérance et

$$\mathbf{E}(e^{tnS_n}) = \mathbf{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}(e^{tX_i}) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}(e^{tX}) = \mathbf{E}(e^{tX})^n.$$

Commentaire. On a utilisé ces résultats du cours : si X et Y sont indépendantes, pour toutes fonctions f et g, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi. En outre, XY admet une espérance et $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$. Ici, on généralise à un produit fini par une récurrence immédiate grâce au lemme des coalitions.

Enfin, en appliquant l'inégalité de Markov avec e^{tnS_n} et $e^{tn\varepsilon}$, on a

$$\mathbf{P}(e^{tnS_n} \geqslant e^{tn\varepsilon}) \leqslant \frac{\mathbf{E}(e^{tnS_n})}{e^{tn\varepsilon}} = \frac{\mathbf{E}(e^{tX})^n}{e^{tn\varepsilon}}.$$

Q35. g_a est dérivable sur $\mathbf{R}$ par opérations usuelles.

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$g_a'(x) = \frac{a-a^{-1}}{2} - a^x \ln a \text{ et } g_a''(x) = -a^x \ln^2 a.$$

Comme $a \neq 1$, $\ln a \neq 0$ donc $g_a''(x) < 0$:

g_a' décroit strictement sur $\mathbf{R}$.

On voit en effet que

$$g_a(-1) = a^{-1} + 0 - a^{-1} = 0,$$
$$g_a(1) = 0 + a - a^1 = 0.$$

D'après le théorème de Rolle, puisque g_a est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$, il existe $c \in\ ]-1,1[$ tel que $g_a'(c) = 0$. Et comme g_a' décroît strictement, elle ne peut s'annuler qu'une fois, donc c est unique. Ainsi, $g_a' > 0$ sur $[-1,c[$ et $g_a' < 0$ sur $]c,1]$, d'où g_a croît strictement sur $[-1,c]$ puis décroît strictement sur $[c,1]$. Alors, puisque g_a s'annule en -1 et 1,

$$\forall x \in [-1,1],\ g_a(x) \geqslant 0.$$

Commentaire. Voici une variante plus rapide. Comme $g_a'' < 0$, g_a est concave sur $[-1,1]$, donc son graphe est au dessus de ses cordes. En particulier, puisque $g_a(1) = g_a(-1) = 0$, la corde reliant les points $(-1, g_a(-1))$ et $(1, g_a(1))$ est le segment $[-1,1]$ lui-même, donc $g_a(x) \geqslant 0$.

Q36. Pour tout $x \in [-1,1]$ et $t > 0$, $e^t > 1$, donc en appliquant le résultat précédent avec $a = e^t$,

$$\frac{1-x}{2}a^{-1} + \frac{1+x}{2}a - a^x \geqslant 0,$$

c'est-à-dire

$$e^{tx} \leqslant \frac{1-x}{2}e^{-t} + \frac{1+x}{2}e^t.$$

Q37. Comme $X(\Omega) \subset [-1,1]$, on peut appliquer cette majoration à X :

$$e^{tX} \leqslant \frac{1-X}{2}e^{-t} + \frac{1+X}{2}e^t = \operatorname{ch}(t) + X\operatorname{sh}(t).$$

On a déjà dit que e^{tX} admet une espérance. Par croissance et linéarité de l'espérance, et sachant que X est centrée,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant \operatorname{ch}(t) + \mathbf{E}(X)\operatorname{sh}(t) = \operatorname{ch}(t).$$

Q38. Soient $t \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$.

Si $k = 0$, les deux membres de l'inégalité souhaitée valent 1, donc elle est vraie.

Si $k \geqslant 1$,

$$(2k)! = \prod_{i=1}^{2k} i = \prod_{i=1}^{k}(2i) \times \prod_{i=1}^{k}(2i-1) \geqslant \prod_{i=1}^{k}(2i) = 2^k k!$$

Donc,

$$\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \frac{t^{2k}}{2^k k!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k.$$

On en déduit que

$$\operatorname{ch} t = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{t^2/2}.$$

Donc pour $t > 0$, avec la question précédente,

$$\mathbf{E}(e^{tX}) \leqslant e^{t^2/2}.$$

Q39. Considérons $f : t \mapsto e^{-nt\varepsilon + nt^2/2}$. Elle est dérivable sur $\mathbf{R}$ et pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$f'(t) = (-n\varepsilon + nt)e^{-nt\varepsilon+nt^2/2}.$$

Où l'on voit que f' s'annule uniquement en $t = \varepsilon$, qu'elle est négative avant et positive après, donc f décroit sur $]-\infty, \varepsilon]$ puis croît sur $[\varepsilon, +\infty[$.

f admet un unique minimum, atteint en $t = \varepsilon$.

Q40. D'après les questions 34 et 38,

$$\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-nt\varepsilon+nt^2/2} = f(t).$$

Comme c'est vrai pour tout $t>0$, c'est en particulier vrai pour $t=\varepsilon$ où f atteint son minimum :

$$\boxed{\mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) \leqslant f(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon^2/2}.}$$

D'autre part, en parlant des évènements,

$$(|S_n| \geqslant \varepsilon) = (S_n \geqslant \varepsilon) \cup (S_n \leqslant -\varepsilon).$$

Ces deux évènements sont incompatibles, donc

$$\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) = \mathbf{P}(S_n \geqslant \varepsilon) + \mathbf{P}(S_n \leqslant -\varepsilon).$$

Introduisons $T_n = -S_n$. On a $(S_n \leqslant -\varepsilon) = (T_n \geqslant \varepsilon)$, donc $\mathbf{P}(S_n \leqslant -\varepsilon) = \mathbf{P}(T_n \geqslant \varepsilon)$. Par construction,

$$T_n = -\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(-X_k)\right).$$

En posant $Y_k = -X_k$,

$$T_n = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right).$$

Les Y_k suivent la même loi que $Y=-X$. La seule propriété de X que l'on a utilisée (à la question 37) dans l'étude précédente est qu'elle est centrée, c'est-à-dire que $\mathbf{E}(X)=0$. Bien-sûr, Y est aussi centrée, par linéarité de l'espérance. Donc l'étude précédente s'applique et

$$\mathbf{P}(T_n \geqslant \varepsilon) \leqslant e^{-n\varepsilon^2/2}.$$

Finalement,

$$\boxed{\mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\,e^{-n\varepsilon^2/2}.}$$

41. $\boxed{\text{Oui.}}$ En effet, $(|S_n| > \varepsilon) \subset (|S_n| \geqslant \varepsilon)$ donc

$$\mathbf{P}(|S_n| > \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant 2\,(e^{-\varepsilon^2/2})^n.$$

Comme $\varepsilon > 0$, $e^{-\varepsilon^2/2} \in \,]0,1[$ et la série géométrique $\sum e^{-n\varepsilon^2/2}$ converge.

42. Par construction, $B_n = \bigcup_{m\geqslant n}(|S_m| > \varepsilon)$ donc comme union d'évènements, $\boxed{B_n \text{ est un évènement.}}$

D'autre part,

$$\begin{aligned} B_n &= (|S_n| > \varepsilon) \cup \left(\bigcup_{m\geqslant n+1} (|S_m| > \varepsilon)\right) \\ &= (|S_n| > \varepsilon) \cup B_{n+1} \end{aligned}$$

donc $B_{n+1} \subset B_n$ et la suite d'évènements (B_n) décroit. Alors le théorème de la continuité décroissante s'applique, qui affirme que

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

En outre, d'après le théorème de sous-additivité,

$$\mathbf{P}(B_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{m\geqslant n} (|S_m| > \varepsilon)\right) \leqslant \sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_m| > \varepsilon),$$

que cette série converge ou pas. Mais ici, elle converge. Mieux,

$$\sum_{m=n}^{+\infty} \mathbf{P}(|S_m| > \varepsilon) \leqslant 2\sum_{m=n}^{+\infty} e^{-m\varepsilon^2/2} = \frac{2\,e^{-n\varepsilon^2/2}}{1-e^{-\varepsilon^2/2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbf{N}^*} B_n\right) = 0.}$$

43. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On peut écrire

$$\Omega_k = \bigcup_{n\in\mathbf{N}^*}\left(\bigcap_{m\geqslant n}\left(|S_m| \leqslant \frac{1}{k}\right)\right).$$

Donc $\boxed{\Omega_k \text{ est un évènement.}}$

Soit $\omega \in A$: $\lim_{n\to\infty} S_n(\omega) = 0$. Cela signifie que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

En particulier, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, en prenant $\varepsilon = 1/k$,

$$\exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k},$$

donc $\omega \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k$. Ainsi, $A \subset \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k$.

Réciproquement, soit $\omega \in \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k$: pour tout $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. En prenant $k = \lfloor 1/\varepsilon \rfloor + 1$, $1/k \leqslant \varepsilon$ et

$$\exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \varepsilon.$$

On vient de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geqslant n,\ |S_m(\omega)| \leqslant \varepsilon.$$

Cela signifie que $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ et $\omega \in A$. Ainsi, $\bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k \subset A$.

Finalement,

$$\boxed{A = \bigcap_{k\in\mathbf{N}^*} \Omega_k.}$$

Et comme intersection d'évènements,

$\boxed{A \text{ est un évènement.}}$

44. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On voit que

$$\overline{\Omega_k} = \bigcap_{n\in\mathbf{N}^*}\left(\bigcup_{m\geqslant n}\left(|S_m| > \frac{1}{k}\right)\right)$$

On reconnait les B_n de la question 42 avec $\varepsilon = 1/k$. Alors $\mathbf{P}(\overline{\Omega_k}) = 0$, donc $\mathbf{P}(\Omega_k) = 1$.

D'autre part, si $\omega \in \Omega_{k+1}$,

$$\exists n \in \mathbf{N}^*, \forall m \geqslant n,\ |S_m| \leqslant \frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{k}$$

donc $\omega \in \Omega_k$. Ainsi, $\Omega_{k+1} \subset \Omega_k$ et la suite d'évènements (Ω_k) décroit. Alors, en utilisant à nouveau le théorème de la continuité décroissante,

$$\boxed{\mathbf{P}(A) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{P}(\Omega_k) = 1.}$$