Corrigé du vingt-septième devoir à la maison

1. Soit $x \in]-1,1[$. On sait que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x)^n.$$

Soit $n \in \mathbf{N}$.

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(-\frac{1}{2}-k)}{n!} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}(1+2k)\right)}{n!} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!\,2^n\,n!} = \frac{(-1)^n\,(2n)!}{4^n\,(n!)^2}.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.}$$

2. Soit $x \in]-1,1[$. On a $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$, d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^{(p+1)n} = f(x^{p+1}).$$

On sait que quand $x \to 1^-$, $\sqrt{1-x}\, f(x) \to \sqrt{\pi}$, donc par composition des limites, sachant que $x^{p+1} \to 1^-$,

$$\sqrt{1-x^{p+1}}\, f(x^{p+1}) \to \sqrt{\pi}.$$

Par ailleurs, toujours quand $x \to 1^-$,

$$1 - x^{p+1} = (1-x) \sum_{k=0}^{p} x^k \sim (1-x)\,(p+1),$$

donc

$$\sqrt{1-x^{p+1}}\, f(x^{p+1}) \sim \sqrt{1-x}\,\sqrt{p+1}\, f(x^{p+1})$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x^{p+1}) = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

3. La fonction $h_p : x \mapsto e^{-(p+1)t}/\sqrt{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.

De plus, $|h_p(t)| \sim_{t\to 0^+} 1/\sqrt{t}$ où $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est intégrable sur $]0,1]$, donc h_p l'est aussi.

Enfin, pour $t \geqslant 1$, $1/\sqrt{t} \leqslant 1$ donc $|h_p(t)| \leqslant e^{-t}$ où $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc h_p aussi.

Ainsi, h_p est intégrable sur $]0,+\infty[$ et

l'intégrale converge.

Le changement de variable $u = (p+1)t$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans lui-même. Donc, sachant que la première intégrale converge, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/(p+1)}}\,\frac{\mathrm{d}u}{p+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.\end{aligned}$$

Grâce à la question précédente,

$$\boxed{\lim_{x\to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x^{p+1}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.}$$

4. Soit un polynôme Q.

Si $Q = 0$, l'égalité voulue est évidente.

Si $Q \neq 0$, en notant $q = \deg Q$, on peut écrire

$$Q = \sum_{p=0}^{q} b_p\, X^p.$$

Soit $x \in]-1,1[$. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\, Q(x^k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{p=0}^{q} b_p\, x^{(p+1)k} \\ &= \sum_{p=0}^{q} b_p \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{(p+1)k}\end{aligned}$$

car la somme sur p est finie. Alors,

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k\, Q(x^k) \\ &= \sum_{p=0}^{q} b_p \left(\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^{(p+1)k}\right) \\ &\xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{q} b_p \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

comme somme finie de limites,
et avec la question 3

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left(\sum_{p=0}^{q} b_p\, e^{-pt}\right) \mathrm{d}t$$

toujours parce que la somme est finie,
et par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, Q(e^{-t})\,\mathrm{d}t.$$

5. La fonction h est continue par morceaux sur $[0,1]$, car elle est continue sur $[0,e^{-1}[$ et $[e^{-1},1]$, et elle admet des limites finies à droite et à gauche en e^{-1}. Donc la fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}\, h(e^{-t})/\sqrt{t}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.

Soit $t \in]0,1]$: alors $e^{-t} \in [e^{-1},1[$,

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\frac{1}{e^{-t}} = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

et φ est intégrable sur $]0,1]$.

Soit $t \in [1,+\infty[$: $e^{-t} \leqslant e^{-1}$ donc

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si } t = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et φ est intégrable sur $]1,+\infty]$.

Donc φ est intégrable sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t} = \int_0^1 \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \Big[2\sqrt{t}\Big]_0^1 \boxed{= 2.}$$

6. Soit $x \in [0,1[$. Comme $\lim_{k\to\infty} x^k = 0$, il existe un rang à partir duquel $x^k \in [0,e^{-1}[$, donc $h(x^k) = 0$. Autrement dit, la suite $(a_k\, x^k\, h(x^k))_{k\in\mathbf{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang, donc $\boxed{\sum a_k\, x^k\, h(x^k) \text{ converge.}}$

7. Posons $x_n = e^{-1/n}$ pour $n \geqslant 1$. Comme $x_n \to 1$, en utilisant l'égalité de Karamata et par composition des limites, on a

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1-x_n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x_n^k\, h(x_n^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, h(e^{-t})\,\mathrm{d}t = 2.$$

Par ailleurs, pour $k > n$, $x_n^k = e^{-k/n} < e^{-1}$ donc $h(x_n^k) = 0$. Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x_n^k\, h(x_n^k) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, x_n^k\, \frac{1}{x_n^k} = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

En outre, quand $n \to \infty$, $1 - x_n = 1 - e^{-1/n} \sim \frac{1}{n}$ donc

$$\sqrt{1-x_n}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x_n^k\, h(x_n^k) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Il s'ensuit que $\boxed{\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.}$

8. Comme $0 < \alpha < 1 < \beta$, $0 < \alpha n < n < \beta n$ donc $0 \leqslant [\alpha n] \leqslant n \leqslant [\beta n]$ par croissance de la fonction partie entière. Par hypothèse, $n - [\alpha n]$ et $n - [\beta n]$ sont non nuls, donc $[\alpha n] < n < [\beta n]$.

Comme la suite (a_k) décroit, pour tout $k \leqslant n$, $a_k \geqslant a_n$ donc

$$S_n - S_{[\alpha n]} = \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_k \geqslant \sum_{k=[\alpha n]+1}^{n} a_n = a_n\,(n - [\alpha n])$$

et

$$\boxed{\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \geqslant a_n.}$$

De même,

$$S_{[\beta n]} - S_n = \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_n = a_n\,([\beta n] - n)$$

et

$$\boxed{\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant a_n.}$$

9. Soit $\gamma > 0$.

On sait que quand $x \to +\infty$, $[x] \sim x$. De plus, quand $n \to \infty$, $\gamma n \to \infty$, donc par composition, $[\gamma n] \sim \gamma n$ et

$$\boxed{\frac{n}{[\gamma n]} \sim \frac{n}{\gamma n} = \frac{1}{\gamma}.}$$

En outre $[\gamma n] \to \infty$ et d'après l'énoncé, $S_{[\gamma n]} \sim 2\sqrt{[\gamma n]}$. Donc

$$\boxed{\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{\gamma n}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma}.}$$

10. Soient $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbf{N}$. Avec l'encadrement de la question 8,

$$\sqrt{n}\,\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \sqrt{n}\,\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

Traitons séparément chaque extrémités de ce nouvel encadrement.

D'une part,

$$\sqrt{n}\,\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} = \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}\,(1 - \frac{[\alpha n]}{n})}.$$

Avec la première limite de la question précédente,

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{[\alpha n]}{n} = \alpha.$$

Avec l'hypothèse de l'énoncé,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2.$$

Et avec la seconde limite de la question précédente,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\alpha}.$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\,\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} = \frac{2 - 2\sqrt{\alpha}}{1-\alpha} = \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}}.$$

Donc il existe un rang N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$,

$$\sqrt{n}\,\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}} + \varepsilon.$$

D'autre part, selon un procédé analogue, il existe un rang N_2 tel que pour tout $n \geqslant N_2$,

$$\sqrt{n}\,\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \geqslant \frac{2}{1+\sqrt{\beta}} - \varepsilon.$$

Pour finir, en revenant à l'encadrement du début de question et en posant $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geqslant N$,

$$\boxed{\frac{2}{1+\sqrt{\beta}} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}} + \varepsilon.}$$

11. On voit que

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \frac{2}{1+\sqrt{\alpha}} = 1.$$

Donc il existe $\alpha < 1$ tel que

$$\frac{2}{1+\sqrt{\alpha}} \leqslant 1 + \varepsilon.$$

De même,

$$\lim_{\beta\to 1^+} \frac{2}{1+\sqrt{\beta}} = 1,$$

donc il existe $\beta > 1$ tel que

$$\frac{2}{1+\sqrt{\beta}} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Avec ces α et β fixés et avec l'encadrement de la question précédente, pour n assez grand on a

$$1 - 2\varepsilon \leqslant \sqrt{n}\, a_n \leqslant 1 + 2\varepsilon.$$

Cela signifie que $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\, a_n = 1.}$

12. On a

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k})} \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-k} \{X_{k+j} = i_j\}\right) && \text{par définition} \\
&= \prod_{j=1}^{n-k} \mathbf{P}(X_{k+j} = i_j) && \text{car les } X_i \text{ sont indépendantes} \\
&= \prod_{j=1}^{n-k} \mathbf{P}(X_j = i_j) && \text{car les } X_i \text{ ont la même loi} \\
&= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-k} \{X_j = i_j\}\right) && \text{à nouveau par indépendance} \\
&\underline{= \mathbf{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}).}
\end{aligned}$$

13. On a

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{P}(S_{k+1}-S_k=j_1,\dots,S_n-S_k=j_{n-k})}\\
&=\mathbf{P}(X_{k+1}=j_1, X_{k+1}+X_{k+2}=j_2,\dots,\\
&\qquad X_{k+1}+\cdots+X_n=j_{n-k})\\
&=\mathbf{P}(X_{k+1}=j_1, X_{k+2}=j_2-j_1,\dots,\\
&\qquad X_n=j_{n-k}-j_{n-k-1})\\
&=\mathbf{P}(X_1=j_1, X_2=j_2-j_1,\dots,\\
&\qquad X_{n-k}=j_{n-k}-j_{n-k-1})\\
&\qquad \text{d'après la question précédente}\\
&=\mathbf{P}(X_1=j_1, X_1+X_2=j_2,\dots,\\
&\qquad X_1+\cdots+X_{n-k}=j_{n-k})\\
&\underline{=\mathbf{P}(S_1=j_1,S_2=j_2,\dots,S_{n-k}=j_{n-k})}.
\end{aligned}$$

14. Par définition de T, $T\geqslant 1>0$ donc $E_0=\Omega$. Or $A_n^n=\{S_n=0\}$ donc

$$\underline{\mathbf{P}(A_n^n)}=\mathbf{P}(S_n=0)\underline{=\mathbf{P}(S_n=0)\mathbf{P}(E_0)}.$$

Soit $k\in[\![0,n-1]\!]$. Comme

$$A_k^n=\{S_k=0\}\cap\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i\neq 0\}\right),$$

on a

$$\mathbf{P}(A_k^n)=\mathbf{P}(S_k=0)\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i\neq 0\}\,\middle|\,\{S_k=0\}\right).$$

Puisque $S_k=0$ dans cette probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i\neq 0\}\,\middle|\,\{S_k=0\}\right)\\
&=\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i-S_k\neq 0\}\,\middle|\,\{S_k=0\}\right).
\end{aligned}$$

De plus, pour tout $i\in[\![k+1,n]\!]$, $S_k=X_1+\cdots+X_k$ et $S_i-S_k=X_{k+1}+\cdots+X_i$. Ainsi, S_i-S_k ne dépend que des X_j pour $j\geqslant k+1$ et S_k ne dépend que des X_j pour $j\leqslant k$. Donc les S_i-S_k et S_k sont indépendantes. Alors

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i-S_k\neq 0\}\,\middle|\,\{S_k=0\}\right)\\
&=\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i-S_k\neq 0\}\right)\\
&=\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i\neq 0\}\right)\ \text{d'après la question 13.}
\end{aligned}$$

Mais par construction, $\bigcap_{i=k+1}^{n}\{S_i\neq 0\}=E_{n-k}$. Ainsi,

$$\boxed{\mathbf{P}(A_k^n)=\mathbf{P}(S_k=0)\mathbf{P}(E_{n-k}).}$$

15. Montrons que la famille $(A_k^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ constitue un système complet d'évènements. Si tel est le cas,

$$\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(A_k^n)=1,$$

ou encore, grâce à la question 14,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_k=0)\mathbf{P}(E_{n-k})=1.}$$

Montrer que $(A_k^n)_{k\in[\![0,n]\!]}$ constitue un système complet d'évènements signifie que $\Omega=\bigcup_{k=0}^{n}A_k^n$ et que pour tout $i\neq j$, $A_i^n\cap A_j^n=\varnothing$. Autrement dit, cela signifie que tout $\omega\in\Omega$ appartient à l'un des A_k^n, et un seul.

Soit $\omega\in\Omega$. Considérons l'ensemble

$$\{i\in[\![0,n]\!],\ S_i(\omega)=0\}.$$

Comme $S_0(\omega)=0$, il est non vide. À l'évidence, il est majoré par n. Alors il admet un plus grand élément : notons-le k.

Soit $j\in[\![0,n]\!]$. Dire que $\omega\in A_j^n$ signifie que $S_j(\omega)=0$ et pour tout $i>j$, $S_i(\omega)\neq 0$.

Par construction, c'est le cas pour $j=k$, car $S_k(\omega)=0$ et pour tout $i>k$, $S_i(\omega)\neq 0$.

Supposons $j\neq k$. Si $j<k$, $S_k(\omega)=0$ avec $k>j$ donc $\omega\notin A_j^n$. Et si $j>k$, $S_j(\omega)=0$ donc également $\omega\notin A_j^n$.

Ainsi, on a bien prouvé que ω est dans un unique A_k^n.

16. D'abord, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $0\leqslant\mathbf{P}(S_n=0)\leqslant 1$ et $0\leqslant\mathbf{P}(E_n)\leqslant 1$ puisque ce sont des probabilités, donc en nommant R_S et R_E les rayons de convergence des séries entières $\sum\mathbf{P}(S_n=0)x^n$ et $\sum\mathbf{P}(E_n)x^n$, $R_S\geqslant 1$ et $R_E\geqslant 1$.

Ensuite, considérons le produit de Cauchy

$$\sum\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_k=0)\mathbf{P}(E_{n-k})\right)x^n$$

des deux séries entières précédentes, de rayon de convergence R_C. D'après le cours, $R_C\geqslant\min(R_S,R_E)$ donc $R_C\geqslant 1$. De plus, pour tout $|x|<\min(R_S,R_E)$, donc en particulier pour tout $x\in\,]0,1[$,

$$\begin{aligned}
&\underline{\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(S_n=0)x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}(E_n)x^n\right)}\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n}\mathbf{P}(S_k=0)\mathbf{P}(E_{n-k})\right)}_{=1\text{ d'après la question 15}}x^n\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\underline{=\frac{1}{1-x}}.
\end{aligned}$$

17. Soient $n\in\mathbf{N}$ et $\omega\in\Omega$. On a

$$S_n(\omega)=\sum_{i=1}^{n}X_i(\omega).$$

Regroupons les $X_i(\omega)$ qui valent 1 et ceux qui valent -1. Pour cela, introduisons les ensembles

$$\begin{aligned}
I&=\{i\in[\![0,n]\!],\ X_i(\omega)=1\}\\
\text{et } J&=\{i\in[\![0,n]\!],\ X_i(\omega)=-1\}.
\end{aligned}$$

Par construction, $[\![0,n]\!]=I\cup J$, où la réunion est disjointe, et

$$\begin{aligned}
S_n(\omega)&=\sum_{i\in I}X_i(\omega)+\sum_{i\in J}X_i(\omega)\\
&=\sum_{i\in I}1+\sum_{i\in J}(-1)=\operatorname{card}I-\operatorname{card}J.
\end{aligned}$$

Alors,

$$S_n(\omega)=0\iff\operatorname{card}I=\operatorname{card}J\Longrightarrow n\in 2\mathbf{N}.$$

Donc si $n\in 2\mathbf{N}+1$, $S_n(\omega)\neq 0$. Ainsi,

$$\boxed{\text{pour tout } p\in\mathbf{N},\ \mathbf{P}(S_{2p+1}=0)=0.}$$

Soit $p \in \mathbf{N}$. L'évènement $\{S_{2p} = 0\}$ s'écrit aussi

$$\bigcup_{\substack{I \subset [\![1,2p]\!] \\ \operatorname{card} I = p}} \left(\left(\bigcap_{i \in I} \{X_i = 1\} \right) \bigcap \left(\bigcap_{i \notin I} (X_i = -1) \right) \right).$$

Comme cette réunion est disjointe et que les X_i sont indépendantes,

$$\mathbf{P}(S_{2p} = 0) = \sum_{\substack{I \subset [\![1,2p]\!] \\ \operatorname{card} I = p}} \left(\left(\prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i = 1) \right) \times \left(\prod_{i \notin I} \mathbf{P}(X_i = -1) \right) \right) = \binom{2p}{p} \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p}.$$

18. D'après la question 1, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\, x^n = \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{2p} = 0)\, x^{2p} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Alors d'après la question 16,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n = \frac{1}{1-x} \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)\, x^n = \frac{1}{1-x} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

19. Posons, pour $n \in \mathbf{N}$, $a_n = \mathbf{P}(E_n)$ et pour $x \in]0,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On voit que $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{2}$.

Pour utiliser la partie B, modifions f en

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

de sorte que $\lim_{x \to 1^-} \sqrt{1-x}\, f(x) = \sqrt{\pi}$. Alors, d'après la question 7,

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n \to \infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Puisque la suite des évènements $\{T > n\}$ décroit clairement, la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ aussi. Alors, la partie C s'applique, d'où l'on tire que

$$a_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Avec la modification de f, cela signifie que

$$\mathbf{P}(E_n) \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.$$

20. Clairement, $\{T = +\infty\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \{T > n\}$. Comme la suite des évènements $\{T > n\}$ décroit, d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$\mathbf{P}(T = +\infty) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(T > n) = \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}(E_n) = 0,$$

grâce à l'équivalent précédent.

21. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\{T > n-1\} = \{T = n\} \cup \{T > n\}$, et cette union est disjointe, d'où $\mathbf{P}(T > n-1) = \mathbf{P}(T = n) + \mathbf{P}(T > n)$, ou encore $\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(E_{n-1}) - \mathbf{P}(E_n)$.

Ainsi, pour tout $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = n)\, x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{P}(E_{n-1}) - \mathbf{P}(E_n))\, x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_{n-1})\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n \\
&= x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)\, x^n - 1 \right) \\
&= x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 \\
&= 1 + (x-1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\
&= 1 - \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \\
&= 1 - \sqrt{1-x^2}.
\end{aligned}$$

Bien-sûr, la propriété est encore vraie pour $x = 0$ ($0 = 0$) ; et pour $x = 1$, par propriété d'une loi de probabilité et sachant que $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) + \mathbf{P}(T = +\infty) = \sum_{n \in T(\Omega)} \mathbf{P}(T = n) = 1.$$

22. La fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$ est paire donc son développement en série entière ne contient que des termes d'exposant pair. Alors, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(T = 2n+1) = 0.$$

De plus, pour tout $x \in [0,1]$,

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = 2n)\, x^{2n}.$$

En posant $y = x^2$, on a donc

$$1 - \sqrt{1-y} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = 2n)\, y^n.$$

En dérivant par rapport à y, et avec la question 1,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}(1 - \sqrt{1-y}\,) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} y^n,$$

donc en intégrant, sachant que la fonction est nulle en 0,

$$\begin{aligned}
1 - \sqrt{1-y} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{y^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \frac{y^n}{n}.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en tire que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(T = 2n) &= \frac{1}{2} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{1}{4^{n-1} n} \\
&= \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1} n} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{(2n)(2n-1)}{(2n)(2n-1)} \\
&= \frac{1}{(2n-1)\, 4^n} \binom{2n}{n}.
\end{aligned}$$