

Corrigé du vingt-huitième devoir à la maison

J'ai oublié de taper le corrigé de la partie II. Toutes mes excuses.

I.A.1. La suite de terme général $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0 et ne vaut jamais 0, donc elle est dans E . Au passage, E est non vide. De plus,

$$u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - 0}{u_n - 0} \right| = \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1,$$

donc (u_n) est dans E^c .

E^c est non vide, qui contient la suite $(\frac{1}{n})$.

I.A.2. Non, car il ne contient pas la suite nulle.

I.A.3. Par définition, $E^c \subset E$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_{2n} = u_{2n+1} = \frac{1}{2n}$. À l'évidence, la suite (u_n) tend vers 0 et ne vaut jamais 0, donc elle est dans E . En revanche,

$$u_{2n}^c = \left| \frac{u_{2n+1} - 0}{u_{2n} - 0} \right| = 1 \text{ et } u_{2n+1}^c = \left| \frac{u_{2n+2} - 0}{u_{2n+1} - 0} \right| = \frac{1}{2},$$

donc (u_n^c) diverge, qui admet deux suites extraites convergentes de limites distinctes. Alors $(u_n) \notin E^c$.

Ainsi, $E^c \subsetneq E$.

I.A.4. Soit $(u_n) \in E^c$: on sait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = \ell^c.$$

Forcément, $\ell^c \in \mathbb{R}_+$. Si $\ell^c > 1$, à partir d'un certain rang, $|u_{n+1} - \ell| > |u_n - \ell|$, donc la suite $(|u_n - \ell|)$ croît strictement à partir de ce rang, ce qui est impossible car elle est positive et converge vers 0. Donc

$\ell^c \in [0, 1]$.

I.B.1. Les trois suites proposées convergent toutes les trois vers 0 et ne sont jamais nulles, donc elles sont bien dans E . De plus, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{(n+2)^k} \bigg/ \frac{1}{(n+1)^k} \right| &= \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1, \\ \left| \frac{(n+1)^k q^{n+1}}{n^k q^n} \right| &= \left(\frac{n+1}{n} \right)^k q \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q, \\ \left| \frac{1}{(n+1)!} \bigg/ \frac{1}{n!} \right| &= \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Les trois suites sont dans E^c . La première converge lentement, la seconde géométriquement de rapport q , et la dernière rapidement.

I.B.2.a. Pour n grand,

$$\begin{aligned} \underline{v_n} &= \exp \left(2^n \ln \left(1 + \frac{1}{2^n} \right) \right) \\ &= \exp \left(2^n \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 2^{2n}} + O \left(\frac{1}{2^{3n}} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 2^n} + O \left(\frac{1}{2^{2n}} \right) \right) \\ &= e \exp \left(-\frac{1}{2^{n+1}} + O \left(\frac{1}{2^{2n}} \right) \right) \\ &= e \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} + O \left(\frac{1}{2^{2n}} \right) \right) \\ &= e - \frac{e}{2^{n+1}} + O \left(\frac{1}{2^{2n}} \right). \end{aligned}$$

I.B.2.b. Où l'on voit que (v_n) tend vers e et ne vaut jamais e , donc elle est dans E . En outre,

$$\left| \frac{v_{n+1} - e}{v_n - e} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e}{2^{n+2}} \bigg/ \frac{e}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, (v_n) est dans E^c et converge géométriquement, de rapport $\frac{1}{2}$.

I.B.3.a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrande de I_n est positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, quand x tend vers $+\infty$,

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) &= \ln \left(\frac{x}{n} \right) + \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) \\ &= \ln x - \ln n + o \left(\frac{1}{x} \right) \sim \ln x, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x} &\sim \ln(x) e^{-x} \\ &= \ln(x) e^{-x/2} e^{-x/2} \ll e^{-x/2}. \end{aligned}$$

Comme $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il en est de même pour l'intégrande, et I_n est bien définie.

Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n \leq \int_0^{+\infty} \frac{x}{n} e^{-x} dx = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

donc (I_n) tend vers 0. Enfin, l'intégrande de I_n n'est pas la fonction nulle, donc $I_n \neq 0$. Ainsi, $(I_n) \in E$.

I.B.3.b Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} I_n &= \left[-\ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \frac{e^{-x}}{1 + \frac{x}{n}} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx. \end{aligned}$$

L'intégration par parties est permise : en effet, les fonctions manipulées sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$; de plus,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x} = 0$$

et le crochet a un sens ; et comme I_n a un sens, la deuxième intégrale en a un et l'égalité est valide.

Alors, on voudrait croire que $I_n \sim \frac{1}{n}$. Voyons si c'est vrai :

$$\begin{aligned} \left| I_n - \frac{1}{n} \right| &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx - \frac{1}{n} \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{n+x} dx - \frac{1}{n} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx \right| \\ &= \left| \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n} \right) e^{-x} dx \right| \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{n(n+x)} dx \\ &\leq \int_0^{+\infty} \frac{x e^{-x}}{n^2} dx = \frac{1}{n^2} = o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Cela signifie que $I_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $I_n \sim \frac{1}{n}$. Alors

$$\left| \frac{I_{n+1}}{I_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $(I_n) \in E^c$ et converge lentement.

I.B.4.a Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge,

$$\ell = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{et} \quad \ell - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Faisons une comparaison série-intégrale. La fonction $x \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante, continue et intégrable sur $[n, +\infty[$, donc

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^\alpha} \leq \ell - S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha} \right|.$$

I.B.4.b. Comme la suite (S_n) croît strictement, elle n'atteint pas sa limite, donc elle est dans E . De plus, grâce à l'encadrement précédent,

$$\ell - S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}, \quad \text{donc} \quad \left| \frac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Ainsi, $(S_n) \in E^c$ et converge lentement.

I.C.1. Par hypothèse, il existe M tel qu'à partir d'un certain rang,

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|^r} \leq M,$$

donc, comme $r - 1 > 0$ et que $u_n - \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,

$$\frac{|u_{n+1} - \ell|}{|u_n - \ell|} \leq M |u_n - \ell|^{r-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

Ainsi, (u_n) converge rapidement.

I.C.2.a. On reconnaît que $s = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. Comme (S_n) croît strictement, elle n'atteint pas sa limite, donc elle est dans E .

I.C.2.b. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'une part,

$$\underline{s - S_n} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{k!} \geq \frac{1}{(n+1)!}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \overline{s - S_n} &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=n+2}^k j} \right) \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{j=n+2}^k 2} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \sum_{k=n+2}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-n-1}} \right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}. \end{aligned}$$

I.C.2.c. Comme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+1)!} &\leq s - S_n \leq \frac{2}{(n+1)!}, \\ \frac{1}{(n+2)!} &\leq s - S_{n+1} \leq \frac{2}{(n+2)!}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \left| \frac{s - S_{n+1}}{s - S_n} \right| &= \frac{s - S_{n+1}}{s - S_n} \leq \frac{2}{(n+2)!} \bigg/ \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{2}{n+2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

$(S_n) \in E^c$ et converge rapidement.

I.C.2.d. Soit $r > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \frac{s - S_{n+1}}{|s - S_n|^r} &\geq \frac{1}{(n+2)!} \bigg/ \left(\frac{2}{(n+1)!} \right)^r \\ &= \frac{((n+1)!)^{r-1}}{(n+2)2^r} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty \end{aligned}$$

par croissances comparées, car $r - 1 > 0$.

Pour tout $r > 1$, la convergence de (S_n) n'est pas d'ordre r .

I.C.3.a. Oui, car f est continue en ℓ .

I.C.3.b. Supposons (u_n) non stationnaire. Alors $(u_n) \in E$, sinon, il existerait un indice N tel que $u_N = \ell$, et comme $\ell = f(\ell)$, à partir du rang N , on aurait $u_n = \ell$ et la suite serait stationnaire.

Comme f est dérivable en ℓ , elle y admet un développement limité à l'ordre 1 : pour x proche de ℓ ,

$$f(x) = f(\ell) + f'(\ell)(x - \ell) + o(x - \ell).$$

Alors, comme (u_n) converge vers ℓ , à partir d'un certain rang u_n est proche de ℓ et l'on peut écrire

$$f(u_n) = f(\ell) + f'(\ell)(u_n - \ell) + o(u_n - \ell)$$

ou encore

$$u_{n+1} = \ell + f'(\ell)(u_n - \ell) + o(u_n - \ell),$$

c'est-à-dire

$$\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} \right| = |f'(\ell)| + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |f'(\ell)|.$$

Ainsi, $(u_n) \in E^c$ et converge géométriquement de rapport $|f'(\ell)|$ si $f'(\ell) \neq 0$, et rapidement si $f'(\ell) = 0$.

I.C.3.c. On vient de montrer que si (u_n) n'est pas stationnaire, elle est dans E^c et $\ell^c = |f'(\ell)|$. D'après la question A.4, $\ell^c \leq 1$, donc ici, $|f'(\ell)| \leq 1$. Par contraposition,

si $|f'(\ell)| > 1$, la suite (u_n) est stationnaire.

I.C.3.d. Comme f est $\mathcal{C}^r$, poussons le développement limité plus loin : d'après la formule de Taylor-Young, pour x proche de ℓ ,

$$f(x) = \sum_{k=0}^r \frac{f^{(k)}(\ell)}{k!} (x - \ell)^k + o((x - \ell)^r),$$

donc pour n grand, sachant que u_n est proche de ℓ ,

$$u_{n+1} = \ell + \sum_{k=1}^r \frac{f^{(k)}(\ell)}{k!} (u_n - \ell)^k + o((u_n - \ell)^r),$$

Si pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $f^{(k)}(\ell) = 0$, il reste

$$u_{n+1} - \ell = \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!} (u_n - \ell)^r + o((u_n - \ell)^r),$$

d'où

$$\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} \right| = \frac{|f^{(r)}(\ell)|}{r!} + o(1)$$

et ce quotient est bornée, donc la convergence de (u_n) est d'ordre r .

À l'inverse, s'il existe $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$ tel que $f^{(k)}(\ell) \neq 0$,

$$\left| \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} \right| = \frac{|f^{(k)}(\ell)|}{k! |u_n - \ell|^{r-k}} + o\left(\frac{1}{|u_n - \ell|^{r-k}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

car $r-k > 0$ et $u_n - \ell \rightarrow 0$. Dans ce cas, la convergence n'est pas d'ordre r .

Finalement, la convergence de (u_n) est d'ordre r si et seulement si pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.