Corrigé du vingt-neuvième devoir à la maison

Préliminaire. Voici deux résultats que nous utiliserons plusieurs fois dans le corrigé.

Par définition de l'exposant conjugué,

$$\boxed{p' = \frac{p}{p-1} \text{ et } p = \frac{p'}{p'-1}.}$$

Pour tout réel $\alpha \neq 0$ et toute fonction $f \in E$,

$$\begin{aligned}\|f\|_p^\alpha &= \left(\int_0^1 |f|^p\right)^{\alpha/p} \\ &= \left(\int_0^1 |f^\alpha|^{p/\alpha}\right)^{\alpha/p} = \|f^\alpha\|_{p/\alpha}.\end{aligned}$$

QA.1. Soit une suite (u_n) de fonctions de E qui converge fortement vers 0 dans L^2, c'est-à-dire $\lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_2 = 0$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et φ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ nulle sur un voisinage de 0 et 1. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le segment $[0,1]$,

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 u_n\,\varphi\right| &\leqslant \sqrt{\int_0^1 |u_n|^2}\sqrt{\int_0^1 |\varphi|^2} \\ &= \|u_n\|_2\,\|\varphi\|_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

donc la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans L^2.

QA.2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et φ comme ci-dessus. En intégrant par parties, ce qui est possible puisque u_n et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$,

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^1 \sin(n\,x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\Big[-\frac{\cos(n\,x)}{n}\,\varphi(x)\Big]_0^1 + \frac{1}{n}\int_0^1 \cos(n\,x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{1}{n}\left|\int_0^1 \cos(n\,x)\,\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 |\cos(n\,x)|\,|\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}\int_0^1 |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

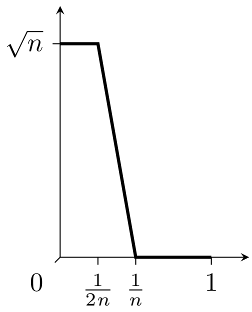
donc la suite $(u_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans L^2.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\|u_n\|_2^2 &= \int_0^1 \sin^2(n\,x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1-\cos(2\,n\,x)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \Big[\frac{\sin(2\,n\,x)}{2\,n}\Big]_0^1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \neq 0,\end{aligned}$$

donc $(u_n)_n$ ne converge pas fortement vers 0 dans L^2.

QA.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour se fixer les idées, voici le graphe de u_n.



La fonction u_n est constante donc continue sur les segments $[0, \frac{1}{2n}]$ et $[\frac{1}{n}, 1]$. Sur l'ouvert $]\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}[$, elle est affine donc continue. Enfin, on voit que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1/(2n)^+} u_n(x) &= \lim_{x\to 1/(2n)^+} 2\sqrt{n}\,(1-n\,x) \\ &= \sqrt{n} = u_n\left(\frac{1}{2\,n}\right), \\ \lim_{x\to 1/n^-} u_n(x) &= \lim_{x\to 1/n^-} 2\sqrt{n}\,(1-n\,x) \\ &= 0 = u_n\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

donc u_n est continue sur $[0,1]$, ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien dans E.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et φ comme plus haut. Par définition, il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi = 0$ sur $[0,\delta]$. Découpons :

$$\int_0^1 u_n\,\varphi = \int_0^\delta u_n\,\varphi + \int_\delta^1 u_n\,\varphi.$$

En choisissant $N = \lfloor\frac{1}{\delta}\rfloor + 1$, si $n \geqslant N$, $\frac{1}{n} \leqslant \delta$, donc $u_n\,\varphi = 0$ sur $[0,\delta]$ car φ l'est, et $u_n\,\varphi = 0$ sur $[\delta, 1]$ car u_n l'est. Alors,

$$\int_0^1 u_n\,\varphi = 0,$$

et $(u_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans L^2.

Par ailleurs,

$$\|u_n\|_2^2 = \int_0^1 u_n^2 \geqslant \int_0^{1/(2n)} u_n^2 = \frac{1}{2},$$

donc $(u_n)_n$ ne converge pas fortement vers 0 dans L^2.

QB.1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} < 0$ donc le logarithme est bien concave. Alors pour tout $(u,v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $t \in]0,1[$, on a

$$\ln\big(t\,u + (1-t)\,v\big) \geqslant t\ln(u) + (1-t)\ln(v).$$

Pour x_1 et x_2 strictement positifs, en appliquant cette relation à $u = x_1^p > 0$, $v = x_2^{p'} > 0$ et $t = \frac{1}{p} \in]0,1[$, on a $1 - t = \frac{1}{p'} \in]0,1[$ et

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^{p'}}{p'}\right) &\geqslant \frac{\ln(x_1^p)}{p} + \frac{\ln(x_2^{p'})}{p'} \\ &= \ln(x_1) + \ln(x_2) = \ln(x_1\,x_2).\end{aligned}$$

Par croissance de l'exponentielle,

$$\boxed{\frac{x_1^p}{p} + \frac{x_2^{p'}}{p'} \geqslant x_1\, x_2.}$$

Bien-sûr, si l'un ou l'autre de x_1 ou x_2 est nul, cette inégalité est clairement vraie.

QB.2. Pour $x_1 = \lambda\,|f(x)|$ et $x_2 = |g(x)|$, on a

$$x_1\, x_2 = \lambda\,|f(x)\, g(x)| \leqslant \frac{\lambda^p\,|f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^{p'}}{p'},$$

et en intégrant,

$$\begin{aligned}\lambda \int_0^1 |f\, g| &\leqslant \frac{\lambda^p}{p} \int_0^1 |f|^p + \frac{1}{p'} \int_0^1 |g|^{p'}\\ &\leqslant \frac{\lambda^p}{p}\, \|f\|_p^p + \frac{1}{p'}\, \|g\|_{p'}^{p'}.\end{aligned}$$

Choisissons λ de sorte que $\lambda^p\,\|f\|_p^p = \|g\|_{p'}^{p'}$, soit

$$\lambda = \frac{\|g\|_{p'}^{p'/p}}{\|f\|_p}.$$

Bien-sûr, il faut que $\|f\|_p \neq 0$, ce qui est garanti quand f n'est pas la fonction nulle puisqu'elle est continue. Et si f est la fonction nulle, l'inégalité attendue est immédiate. Alors

$$\frac{\|g\|_{p'}^{p'/p}}{\|f\|_p} \int_0^1 |f\, g| \leqslant \|g\|_{p'}^{p'} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'}\right) = \|g\|_{p'}^{p'},$$

ou encore,

$$\boxed{\int_0^1 |f\, g| \leqslant \|f\|_p\, \|g\|_{p'}^{p'-p'/p} = \|f\|_p\, \|g\|_{p'}.}$$

QB.3. Procédons par récurrence.

Soient $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$ et

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}.$$

En écrivant

$$1 = \frac{r}{p_1} + \frac{r}{p_2}$$

et en appliquant la question précédente à $\dfrac{p_1}{r}$, $\dfrac{p_2}{r}$ et f_1, f_2 dans E,

$$\begin{aligned}\|f_1\, f_2\|_r^r = \int_0^1 |f_1\, f_2|^r &= \int_0^1 |f_1^r\, f_2^r|\\ &\leqslant \|f_1^r\|_{p_1/r}\, \|f_2^r\|_{p_2/r} = \|f_1\|_{p_1}^r\, \|f_2\|_{p_2}^r,\end{aligned}$$

d'où $\|f_1\, f_2\|_r \leqslant \|f_1\|_{p_1}\, \|f_2\|_{p_2}$.

Supposons l'inégalité vraie au rang n. Soient $p_1, \dots, p_{n+1}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $f_1, \dots, f_{n+1}$ dans E, et posons

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{p_i} \quad\text{et}\quad \frac{1}{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i},$$

de sorte que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s} + \frac{1}{p_{n+1}}.$$

En utilisant l'inégalité au rang 2 que l'on vient de prouver, puis l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}\left\|\prod_{i=1}^{n+1} f_i\right\|_r &\leqslant \left\|\prod_{i=1}^{n} f_i\right\|_s \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}}\\ &\leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}\right) \|f_{n+1}\|_{p_{n+1}} = \prod_{i=1}^{n+1} \|f_i\|_{p_i},\end{aligned}$$

et l'inégalité est vraie au rang $n+1$, ce qui termine la récurrence.

QB.4. Écrivons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \text{ avec } \frac{1}{p_1} = \frac{\theta}{p} \text{ et } \frac{1}{p_2} = \frac{1-\theta}{q}.$$

On a

$$\begin{aligned}\|u\|_r = \|u^\theta\, u^{1-\theta}\|_r &\leqslant \|u^\theta\|_{p_1}\, \|u^{1-\theta}\|_{p_2}\\ &= \|u^\theta\|_{p/\theta}\, \|u^{1-\theta}\|_{q/(1-\theta)} = \|u\|_p^\theta\, \|u\|_q^{1-\theta}.\end{aligned}$$

QB.5. Soit (u_n) une suite de E comme dans l'énoncé. Soit $p \in \left]p_1, p_2\right[$. On a $\frac{1}{p} \in \left]\frac{1}{p_2}, \frac{1}{p_1}\right[$, donc on peut écrire

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2}$$

où $\theta \in \left]0, 1\right[$. Avec la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n - u\|_p \leqslant \|u_n - u\|_{p_1}^\theta\, \|u_n - u\|_{p_2}^{1-\theta}.$$

En outre, il existe $M \geqslant 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_{p_2} \leqslant M$, donc

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|_p &\leqslant \|u_n - u\|_{p_1}^\theta\, (\|u_n\|_{p_2} + \|u\|_{p_2})^{1-\theta}\\ &\leqslant \|u_n - u\|_{p_1}^\theta\, (M + \|u\|_{p_2})^{1-\theta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $p \in \left]p_1, p_2\right[$, la suite $(u_n)_n$ converge fortement vers u pour la norme p.

QC.1.1. Soit $x \geqslant 0$. Par croissance du logarithme,

$$\begin{aligned}&1 + x^p \leqslant (1+x^2)^{p/2}\\ \iff\ &\ln(1+x^p) \leqslant \frac{p}{2}\ln(1+x^2)\\ \iff\ &\frac{1}{p}\ln(1+x^p) \leqslant \frac{1}{2}\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

Si $x \leqslant 1$, cette dernière inégalité est vraie car $p \geqslant 2$ donc $x^p \leqslant x^2$ et $\frac{1}{p} \leqslant \frac{1}{2}$. Si $x > 1$, en factorisant par x^p et x^2 respectivement,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{p}\ln(1+x^p) \leqslant \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\\ \iff\ &\ln x + \frac{1}{p}\ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^p\right)\\ &\qquad\leqslant \ln x + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2\right)\end{aligned}$$

et on se ramène au cas précédent car $\frac{1}{x} < 1$.

Pour tout $x \geqslant 0$, $1 + x^p \leqslant (1+x^2)^{p/2}$.

QC.1.2. Si $b = -a$, l'inégalité est évidente, qui se réduit à $|a|^p = (a^2)^{p/2}$. Sinon, posons $x = \left|\dfrac{a-b}{a+b}\right|$:

$$\begin{aligned}1 + \left|\frac{a-b}{a+b}\right|^p &\leqslant \left(1 + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)^{p/2}\\ &= \frac{2^{p/2}\,(a^2+b^2)^{p/2}}{|a+b|^p}.\end{aligned}$$

En multipliant par $\left|\dfrac{a+b}{2}\right|^p$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leqslant \frac{(a^2+b^2)^{p/2}}{2^{p/2}}\\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{p/2}.\end{aligned}$$

QC.1.3. Comme $\frac{p}{2} \geqslant 1$, la fonction $u \mapsto u^{p/2}$ est bien convexe sur $\mathbb{R}_+$ donc pour tous u, v positifs,

$$\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v\right)^{p/2} \leqslant \frac{1}{2}u^{p/2} + \frac{1}{2}v^{p/2}.$$

Ici, on obtient donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{a+b}{2}\right|^p + \left|\frac{a-b}{2}\right|^p &\leqslant \frac{1}{2}(a^2)^{p/2} + \frac{1}{2}(b^2)^{p/2} \\ &= \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p.\end{aligned}$$

Pour des fonctions f et g de E, on a donc

$$\left|\frac{f+g}{2}\right|^p + \left|\frac{f-g}{2}\right|^p \leqslant \frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p,$$

et en intégrant sur $[0,1]$,

$$\boxed{\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^p + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p.}$$

QC.2.1.1. Soit $x \in \,]0,1[$. On a

$$\begin{aligned}h(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p}{n}x^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\binom{p}{n}x^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p-1}{n}x^{np'} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{p}{2k}x^{2k} - \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{p-1}{2k}x^{2kp'} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{+\infty}\binom{p-1}{2k-1}x^{(2k-1)p'} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\binom{p}{2k}x^{2k} - \binom{p-1}{2k}x^{2kp'}\right. \\ &\quad \left. - \binom{p-1}{2k-1}x^{(2k-1)p'}\right]\end{aligned}$$

Le terme général de cette somme s'écrit

$$\begin{aligned}&\frac{p(p-1)\cdots(p-2k+1)}{(2k)!}x^{2k} \\ &- \frac{(p-1)\cdots(p-2k+1)(p-2k)}{(2k)!}x^{2kp'} \\ &- \frac{(p-1)\cdots(p-2k+1)}{(2k-1)!}x^{(2k-1)p'}.\end{aligned}$$

Factorisons-le par

$$\frac{(p-1)\cdots(p-2k+1)}{(2k-1)!} = \frac{p-1}{(2k-1)!}\prod_{j=2}^{2k-1}(p-j).$$

Comme $1 < p < 2$, $p-1 > 0$ et pour tout $j \in [\![2, 2k-1]\!]$, $p-j < 0$: le produit comporte $2k-1-2+1 = 2(k-1)$ termes négatifs, c'est-à-dire un nombre pair de termes, donc il est positif. Après factorisation, il reste

$$\frac{p}{2k}x^{2k} - \frac{(p-2k)}{2k}x^{2kp'} - x^{(2k-1)p'}.$$

Sachant que $p = \dfrac{p'}{p'-1}$, ce terme devient

$$\begin{aligned}&\frac{p'x^{2k}}{2k(p'-1)} - \frac{p'-2k(p'-1)}{2k(p'-1)}x^{2kp'} - x^{(2k-1)p'} \\ &= \frac{p'x^{2k}}{2kp'-2k} + \frac{(2k-1)p'-2k}{2kp'-2k}x^{2kp'} - x^{(2k-1)p'}.\end{aligned}$$

Factorisons par $(2k-1)p'-2k$. Comme $p < 2$,

$$p' = \frac{1}{1-\frac{1}{p}} > \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2,$$

donc

$$(2k-1)p' - 2k > 2(2k-1) - 2k = 2(k-1) \geqslant 0.$$

Après factorisation, il reste

$$\begin{aligned}&\frac{p'x^{2k}}{(2kp'-2k)((2k-1)p'-2k)} \\ &+ \frac{x^{2kp'}}{2kp'-2k} - \frac{x^{(2k-1)p'}}{(2k-1)p'-2k}.\end{aligned}$$

Or, en décomposant en éléments simples de la variable k,

$$\begin{aligned}&\frac{p'}{(2kp'-2k)((2k-1)p'-2k)} \\ &= \frac{1}{(2k-1)p'-2k} - \frac{1}{2kp'-2k},\end{aligned}$$

donc le terme précédent s'écrit

$$\begin{aligned}&\frac{x^{2k}-x^{(2k-1)p'}}{(2k-1)p'-2k} - \frac{x^{2k}-x^{2kp'}}{2kp'-2k} \\ &= x^{2k}\left(\frac{1-x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p'-2k} - \frac{1-x^{2kp'-2k}}{2kp'-2k}\right).\end{aligned}$$

En résumé,

$$\begin{aligned}h(x) = \sum_{k=1}^{+\infty}&\left[\frac{p-1}{(2k-1)!}\prod_{j=2}^{2k-1}(p-j)\right. \\ &\times ((2k-1)p'-2k)x^{2k} \\ &\left.\times\left(\frac{1-x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p'-2k} - \frac{1-x^{2kp'-2k}}{2kp'-2k}\right)\right].\end{aligned}$$

En vertu des signes rencontrés,

$$\boxed{\text{pour que } h(x) \geqslant 0, \text{ il suffit que pour tout } k \geqslant 1,\quad \frac{1-x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p'-2k} - \frac{1-x^{2kp'-2k}}{2kp'-2k} \geqslant 0.}$$

QC.2.1.2. La fonction $u \mapsto x^u$ est une exponentielle donc elle est convexe. Alors son taux d'accroissement en 0 croît : autrement dit, la fonction

$$u \mapsto \frac{x^u - x^0}{u-0}$$

croît, ou encore

$$\boxed{\text{la fonction } G : u \mapsto \frac{1-x^u}{u} \text{ décroit.}}$$

QC.2.1.3. On a

$$\begin{aligned}&\frac{1-x^{(2k-1)p'-2k}}{(2k-1)p'-2k} - \frac{1-x^{2kp'-2k}}{2kp'-2k} \\ &= G((2k-1)p'-2k) - G(2kp'-2k) \geqslant 0\end{aligned}$$

car $(2k-1)p'-2k \leqslant 2kp'-2k$ et G décroit. C'est l'inégalité attendue à la question QC.2.1.1, donc

$$\boxed{\text{l'inégalité (4) est vérifiée.}}$$

Prolongeons cette inégalité sur $\mathbb{R}$. Si $x \in]-1,0[$, l'inégalité (4) s'applique à $|x| \in]0,1[$:

$$(1+|x|^{p'})^{p-1} \leqslant \frac{(1+|x|)^p + (1-|x|)^p}{2}.$$

Comme $1+|x| = 1-x$ et $1-|x| = 1+x$, on a donc pour tout $x \in]-1,0[$,

$$(1+|x|^{p'})^{p-1} \leqslant \frac{(1+x)^p + (1-x)^p}{2}.$$

Bien-sûr, cette inégalité est évidente pour $x = 0$. Et pour tout $x \in]-1,1[$, $1-x = |1-x|$ et $1+x = |1+x|$. Donc on peut écrire

$$\text{(4bis)} \qquad (1+|x|^{p'})^{p-1} \leqslant \frac{|1+x|^p + |1-x|^p}{2}.$$

Cette inégalité est encore évidente si $|x| = 1$. Enfin, en posant $y = \frac{1}{x}$, sauf bien-sûr si $x = 0$, on a

$$\begin{aligned}(1+|x|^{p'})^{p-1} &= \frac{(|y|^{p'}+1)^{p-1}}{|y|^{p'(p-1)}} = \frac{(|y|^{p'}+1)^{p-1}}{|y|^p} \\ &\leqslant \frac{|1+x|^p + |1-x|^p}{2} = \frac{|y+1|^p + |y-1|^p}{2\,|y|^p}\end{aligned}$$

d'où

$$(1+|y|^{p'})^{p-1} \leqslant \frac{|1+y|^p + |1-y|^p}{2},$$

ce qui est encore l'inégalité (4bis) mais avec $|y| \geqslant 1$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{(4bis)} \qquad (1+|x|^{p'})^{p-1} \leqslant \frac{|1+x|^p + |1-x|^p}{2}.$$

QC.2.2. Si $|u| = |v|$, l'inégalité (5) se réduit à $|u|^{p'} = |u|^{p/(p-1)}$. Sinon, posons

$$x = \frac{v-u}{v+u}, \quad 1+x = \frac{2v}{v+u} \text{ et } 1-x = \frac{2u}{v+u}.$$

D'après l'inégalité (4bis),

$$\begin{aligned}\left(1+\left|\frac{v-u}{v+u}\right|^{p'}\right)^{p-1} &= \frac{\left(|v+u|^{p'} + |v-u|^{p'}\right)^{p-1}}{|v+u|^{p'(p-1)}} \\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left|\frac{2v}{v+u}\right|^p + \left|\frac{2u}{v+u}\right|^p\right) \\ &= \frac{2^p}{|v+u|^{p'(p-1)}}\,\frac{|v|^p + |u|^p}{2},\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{\left(|v+u|^{p'} + |v-u|^{p'}\right)^{p-1}}{2^{p'(p-1)}} \leqslant \frac{|v|^p + |u|^p}{2},$$

et l'on en déduit l'inégalité (5).

QC.2.3. Soient f et g dans E. On a

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} = \left\|\left(\frac{f+g}{2}\right)^{p'}\right\|_{p/p'} = \left\|\left(\frac{f+g}{2}\right)^{p'}\right\|_{p-1}$$

Alors, comme $1 < p < 2$, $0 < p-1 < 1$, donc avec l'inégalité de Minkowski, puis l'inégalité (5), on a

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^{p'} + \left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^{p'} \\ &= \left\|\left(\frac{f+g}{2}\right)^{p'}\right\|_{p-1} + \left\|\left(\frac{f-g}{2}\right)^{p'}\right\|_{p-1} \\ &\leqslant \left\|\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} \\ &= \left(\int_0^1 \left(\left|\frac{f+g}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{f-g}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1}\right)^{1/(p-1)} \\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left(\frac{1}{2}|f|^p + \frac{1}{2}|g|^p\right)\right)^{1/(p-1)} \\ &= \left(\frac{1}{2}\|f\|_p^p + \frac{1}{2}\|g\|_p^p\right)^{1/(p-1)}.\end{aligned}$$

QC.3. Considérons d'abord le cas où $p \geqslant 2$. D'après l'inégalité de Clarkson (1),

$$\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p \leqslant \frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p - \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p^p.$$

Par hypothèse,

$$\|u\|_p \leqslant \liminf_{n\to+\infty}\left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p = \lim_{n\to+\infty}\inf_{k>n}\left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p.$$

Or la suite

$$\left(\inf_{k>n}\left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p\right)_n$$

croît donc sa limite est sa borne supérieure. Alors, à partir d'un certain rang,

$$\|u\|_p \leqslant \inf_{k>n-1}\left\|\frac{u_k+u}{2}\right\|_p \leqslant \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p.$$

Du coup,

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^p &\leqslant \frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p - \|u\|_p^p \\ &= \frac{1}{2}\left(\|u_n\|_p^p - \|u\|_p^p\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

Considérons maintenant la cas où $1 < p < 2$. D'après l'inégalité de Clarkson (3),

$$\begin{aligned}\left\|\frac{u_n-u}{2}\right\|_p^{p'} &\leqslant \left(\frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p\right)^{1/(p-1)} \\ &\quad - \left\|\frac{u_n+u}{2}\right\|_p^{p'} \\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\|u_n\|_p^p + \frac{1}{2}\|u\|_p^p\right)^{1/(p-1)} - \|u\|_p^{p'} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \|u_n\|_p^{p/(p-1)} - \|u\|_p^{p'} = 0.\end{aligned}$$

Dans tous les cas, la suite (u_n) converge fortement vers u pour la norme p.