

Troisième devoir à la maison

On considère un entier $n \geq 2$ et un espace vectoriel E de dimension n sur $\mathbb{R}$. On note 0_E le vecteur nul de E et id_E l'application identité de E .

Soit f un endomorphisme de E . On pose $f^0 = \text{id}_E$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $f^k = f \circ f^{k-1}$.

Le but du problème est de démontrer que

$$(1) \quad \forall f \in \mathfrak{L}(E), \exists p \in \llbracket 1, n \rrbracket, E = \text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p).$$

1. Dans cette question, f est un automorphisme de E . Donner une valeur de p satisfaisant (1). Justifier la réponse.

2. EXEMPLE 1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}^3$; (e_1, e_2, e_3) est une base de E dans laquelle f a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$. Peut-on choisir $p = 1$?

b) Déterminer une base de $\text{Ker}(f^2)$ et de $\text{Im}(f^2)$. Justifier l'égalité : $E = \text{Ker}(f^2) \oplus \text{Im}(f^2)$.

3. EXEMPLE 2. Dans cette question, m est un paramètre réel; $E = \mathbb{R}^4$; (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E dans laquelle f a pour matrice :

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -m & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une base de $\text{Ker } f$ et de $\text{Im } f$. Peut-on choisir $p = 1$? On discutera suivant les valeurs de m .

b) Déterminer le plus petit entier p vérifiant (1).

4. ÉTUDE DU CAS GÉNÉRAL. Dans cette question, on suppose que l'endomorphisme f n'est pas bijectif.

a) Soit k un entier naturel. Montrer les inclusions :

$$\text{Ker}(f^k) \subset \text{Ker}(f^{k+1}), \quad \text{Im}(f^{k+1}) \subset \text{Im}(f^k).$$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \dim(\text{Ker}(f^k))$. Montrer que la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) Soit $F = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k = a_{k+1}\}$. Montrer que $F \neq \emptyset$.

d) En déduire l'existence d'un entier $p \geq 1$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \text{Ker}(f^k) \neq \text{Ker}(f^{k+1}), \\ \text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1}).$$

e) Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq p \implies \text{Ker}(f^k) = \text{Ker}(f^p).$$

f) Déduire de ce qui précède l'égalité

$$E = \text{Ker}(f^p) \oplus \text{Im}(f^p).$$