Corrigé du troisième devoir à la maison

1. Comme f est un automorphisme de E, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, $\operatorname{Im} f = E$ et $E = E \oplus \{0_E\}$, donc $\boxed{\text{on peut choisir } p = 1.}$

2.a. Notons A la matrice de l'énoncé. Les éléments de E seront notés sous la forme (x, y, z).

Pour trouver le noyau de f, on résout le système

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \\ -4x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x - 2y + 4z = 0 \\ -2x - y - z = 0 \end{cases} \iff y = z = -x.$$

$\boxed{\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}((-1, 1, 1)).}$

D'après le théorème du rang, l'image de f est donc un plan vectoriel. Il est engendré par les trois colonnes de la matrice A, qui sont donc forcément liées (on peut d'ailleurs remarquer que la combinaison linéaire $-C_1 + C_2 + C_3$ de ces trois colonnes est nulle). On choisit alors deux colonnes indépendantes :

$\boxed{\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}((4, -2, -4), (-1, -1, 1)).}$

Comme le déterminant des trois vecteurs ci-dessus est nul, on voit que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f$, leur somme n'est donc pas directe :

$\boxed{\text{on ne peut choisir } p = 1.}$

2.b f^2 a pour matrice $A^2 = 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
$\operatorname{Ker}(f^2)$ est le plan d'équation $x - y + 2z = 0$.

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f^2) &= \operatorname{Vect}((1, 1, 0), (0, 2, 1)), \\ \operatorname{Im}(f^2) &= \operatorname{Vect}((-1, -1, 1)). \end{aligned}}$$

Comme le déterminant de ces trois vecteurs est non nul, $\operatorname{Ker}(f^2) \cap \operatorname{Im}(f^2) = \{0_E\}$, et grâce au théorème du rang, $\boxed{E = \operatorname{Im}(f^2) \oplus \operatorname{Ker}(f^2).}$

3.a Notons f_m l'endomorphisme de matrice A_m, et (x, y, z, t) les éléments de E.

$\operatorname{Ker}(f_m)$ est le plan d'équations $y=0, x-mz-t=0$ et les colonnes C_1, C_3 et C_4 de A_m sont manifestement proportionnelles, donc

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{Ker}(f_m) &= \operatorname{Vect}((1, 0, 0, 1), (m, 0, 1, 0)), \\ \operatorname{Im}(f_m) &= \operatorname{Vect}((0, 0, 1, 0), (-1, m, 0, 1)). \end{aligned}}$$

Si $m \neq 0$, le déterminant des quatre vecteurs ci-dessus n'est pas nul, ce qui signifie qu'ils sont indépendants, donc

$\boxed{\text{si } m \neq 0,\ E = \operatorname{Im}(f_m) \oplus \operatorname{Ker}(f_m) \text{ et l'on choisit } p = 1.}$

En revanche, si $m = 0$, $(0, 0, 1, 0)$ est à la fois dans $\operatorname{Ker}(f_0)$ et $\operatorname{Im}(f_0)$, donc

$\boxed{\text{si } m = 0, \text{ on ne peut choisir } p = 1.}$

3.b. Supposons $m = 0$: $A_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Alors, $\operatorname{Im}(f_0^2) = \operatorname{Vect}(e_3)$. Comme $f_0^2(e_3) = 0_E$, $\operatorname{Im}(f_0^2) \subset \operatorname{Ker}(f_0^2)$, donc $\operatorname{Ker}(f_0^3) = E$ et $\operatorname{Im}(f_0^3) = \{0_E\}$.

$\boxed{\text{Ainsi, } E = \operatorname{Ker}(f_0^3) \oplus \operatorname{Im}(f_0^3), \text{ et } p = 3.}$

4.a. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^k)$: $f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. D'autre part, soit $y \in \operatorname{Im}(f^{k+1})$: il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k+1}(x)$. Donc $y = f^k(f(x))$, donc $y \in \operatorname{Im}(f^k)$.

$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1}), \operatorname{Im}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Im}(f^k).}$

4.b. On a donc $a_k \leqslant a_{k+1}$ et $\boxed{\text{la suite } (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ croît.}}$

4.c. Comme $\operatorname{Ker}(f^k) \subset E$, $a_k \leqslant n$. Ainsi $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers croissante et majorée, donc elle ne peut être strictement croissante, c'est-à-dire qu'il existe un k tel que $a_k = a_{k+1}$: $\boxed{F \neq \varnothing.}$

Commentaire. On pouvait dire aussi que la suite converge, donc elle est stationnaire.

4.d. Ainsi, F est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et minorée par 0 : elle admet un plus petit élément p. Comme f n'est pas injective, $p \geqslant 1$. Par définition de p, aucun entier $k < p$ n'est dans F, donc $a_k < a_{k+1}$, donc $\operatorname{Ker}(f^k) \neq \operatorname{Ker}(f^{k+1})$; et $p \in F$, donc $a_p = a_{p+1}$, donc, comme $\operatorname{Ker}(f^p) \subset \operatorname{Ker}(f^{p+1})$, $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+1})$.

$\boxed{\text{Pour } k < p,\ \operatorname{Ker}(f^k) \neq \operatorname{Ker}(f^{k+1}), \text{ et } \operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^{p+1}).}$

4.e. Pour $k \geqslant p$, démontrons par récurrence la proposition $P(k)$: « $\operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^p)$ ».

La proposition $P(p)$ est vraie, d'après la question précédente. Supposons que $P(k)$ soit vraie. Alors, $\operatorname{Ker}(f^p) = \operatorname{Ker}(f^k) \subset \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Il s'agit de montrer l'autre inclusion. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f^{k+1})$. Alors $f^{k+1}(x) = f^k(f(x)) = 0_E$, donc $f(x) \in \operatorname{Ker}(f^k)$. Or $\operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^p)$, donc $f^p(f(x)) = f^{p+1}(x) = 0_E$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f^{p+1})$. Mais, d'après d), $\operatorname{Ker}(f^{p+1}) = \operatorname{Ker}(f^p)$, donc $x \in \operatorname{Ker}(f^p)$, donc $\operatorname{Ker}(f^{k+1}) \subset \operatorname{Ker}(f^p)$. Cela prouve que $\operatorname{Ker}(f^{k+1}) = \operatorname{Ker}(f^p)$, et $P(k+1)$ est vraie.

$\boxed{\text{Pour } k \geqslant p,\ \operatorname{Ker}(f^k) = \operatorname{Ker}(f^p).}$

4.f. Soit $x \in \operatorname{Im}(f^p) \cap \operatorname{Ker}(f^p)$: il existe $y \in E$ tel que $x = f^p(y)$, et $f^p(x) = 0_E$. Donc $f^{2p}(y) = 0_E$ et $y \in \operatorname{Ker}(f^{2p}) = \operatorname{Ker}(f^p)$. Alors $x = f^p(y) = 0_E$. Ainsi, $\operatorname{Im}(f^p) \cap \operatorname{Ker}(f^p) = \{0_E\}$. Comme $\dim(\operatorname{Im}(f^p)) + \dim(\operatorname{Ker}(f^p)) = \dim E$,

$\boxed{E = \operatorname{Ker}(f^p) \oplus \operatorname{Im}(f^p).}$