Corrigé du quatrième devoir à la maison

Convention. Pour simplifier les écritures, convenons dans tout le corrigé que

$$\text{(C)} \qquad \forall (p,q) \in \mathbb{N}^2,\ p > q \Longrightarrow \binom{q}{p} = 0.$$

Cette convention est cohérente avec la simplification

$$\binom{q}{p} = \frac{1}{p!} \prod_{j=0}^{p-1} (q-j),$$

valable si $1 \leqslant p \leqslant q$, où l'on voit que si $p > q$, l'indice $j = q$ est possible et annule le produit.

A.1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X] \smallsetminus \{0\}$. En notant $d = \deg(P)$, $d \in \mathbb{N}$ et l'on peut écrire $P = \sum_{k=0}^{d} a_k\, X^k$ avec $a_d = \mathrm{cd}(P)$ et $a_d \neq 0$. Alors

$$\tau(P)(X) = P(X+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k\,(X+1)^k.$$

Alors clairement,

$$\deg(\tau(P)) = d = \deg(P),$$
$$\text{et } \mathrm{cd}(\tau(P)) = a_d = \mathrm{cd}(P).$$

A.2. Par une récurrence immédiate, on voit que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \tau^k(P)(X) = P(X+k).$$

En effet, c'est vrai au rang 0 : $\tau^0(P)(X) = P(X)$; et si l'on suppose que c'est vrai pour un certain $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\tau^{k+1}(P)(X) &= \tau(\tau^k(P))(X) = \tau^k(P)(X+1)\\ &= P((X+1)+k) = P(X+k+1).\end{aligned}$$

A.3. Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$. La colonne j de M contient les coordonnées de $\tau(P_j)$ dans la base $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$:

$$\tau(P_j)(X) = \sum_{i=1}^{n+1} M_{i,j}\, P_i(X).$$

Par ailleurs, avec la convention (C),

$$\begin{aligned}\tau(P_j)(X) &= P_j(X+1) = (X+1)^{j-1}\\ &= \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j-1}{i} X^i = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} P_i(X) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} P_i(X).\end{aligned}$$

Ainsi, par unicité des coordonnées de $\tau(P_j)$ dans la base $(P_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$,

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

A.4.* Où l'on voit que M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, laquelle ne contient que des 1. Et les valeurs propres de τ sont celles de M, donc $\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}$.

Alors l'endomorphisme τ n'est pas diagonalisable. S'il l'était, M serait semblable à la matrice diagonale qui n'a que des 1 sur la diagonale, c'est-à-dire I_{n+1}, ce qui n'est pas, car seule I_{n+1} est semblable à I_{n+1}.

A.5. L'endomorphisme τ est bijectif, car il n'admet pas 0 comme valeur propre. De plus, clairement,

$$\tau^{-1} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X],\ P(X) \mapsto P(X-1).$$

Et l'on voit par une récurrence analogue à celle de la question A.2 que

$$\forall j \in \mathbb{Z},\ \tau^j(P)(X) = P(X+j).$$

A.6. Soit $j \in [\![1, n+1]\!]$.

$$\begin{aligned}\tau^{-1}(P_j)(X) &= P_j(X-1) = (X-1)^{j-1}\\ &= \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j-1-i} \binom{j-1}{i} X^i\\ &= \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-1-(i-1)} \binom{j-1}{i-1} X^{i-1}\\ &= \sum_{i=1}^{j} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i(X).\end{aligned}$$

Comme en A.3, et avec la convention (C),

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,\ (M^{-1})_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}.$$

A.7. Considérons les colonnes

$$U = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$, de sorte que

$$V = QU.$$

Si l'on écrit $Q = (Q_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$, $U^\top = (U_j)_{1 \leqslant j \leqslant n+1}$ et $V^\top = (V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n+1}$, alors pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$,

$$V_i = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{i,j}\, U_j,$$

ou encore, puisque $V_i = v_{i-1}$ et $U_j = u_{j-1}$,

$$v_{i-1} = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{i,j}\, u_{j-1}.$$

Or, avec la convention (C), et en posant $k = i - 1$ dans la relation (1),

$$\begin{aligned} v_{i-1} &= \sum_{j=0}^{i-1} \binom{i-1}{j} u_j = \sum_{j=1}^{i} \binom{i-1}{j-1} u_{j-1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{i-1}{j-1} u_{j-1}. \end{aligned}$$

Donc, avec la question A.3,

$$Q_{i,j} = \binom{i-1}{j-1} = M_{j,i},$$

d'où $\boxed{Q = M^\top.}$

A.8. Alors $U = Q^{-1} V$ où $Q^{-1} = (M^{-1})^\top$, ce qui donne pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned} U_i &= \sum_{j=1}^{n+1} (Q^{-1})_{i,j} V_j = \sum_{j=1}^{n+1} (M^{-1})_{j,i} V_j \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} V_j, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \binom{i-1}{j-1} v_{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-(j+1)} \binom{i-1}{j} v_j \\ &= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j} \binom{i-1}{j} v_j. \end{aligned}$$

Comme cette expression ne dépend pas de n, on en tire en posant $k = i - 1$,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j.} \tag{2}$$

A.9. Ici, $u_k = \lambda^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc

$$\boxed{v_k} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j \boxed{= (1+\lambda)^k.}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j} &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (1+\lambda)^j \\ &= (1 + \lambda - 1)^k = \lambda^k \boxed{= u_k,} \end{aligned}$$

où l'on retrouve bien la relation (2).

B.1. Soit P non constant : il s'écrit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $a_d \neq 0$ et $d \geqslant 1$. Alors

$$\delta(P)(X) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=1}^{d} a_k ((X+1)^k - X^k).$$

Pour tout $k \in [\![1, d]\!]$,

$$(X+1)^k - X^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} X^j$$

donc

$$\begin{aligned} &\boxed{\deg(\delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1} \\ &\text{et } \boxed{\operatorname{cd}(\delta(P)) = d a_d = d \operatorname{cd}(P).} \end{aligned}$$

B.2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\deg(P) \geqslant 1$, avec ce qui précède $\operatorname{cd}(\delta(P)) \neq 0$ donc $\delta(P) \neq 0$ et $P \notin \ker(\delta)$. Donc $\ker(\delta) \subset \mathbb{R}_0[X]$. Réciproquement, si P est constant, on voit que $\delta(P) = 0$ donc $\mathbb{R}_0[X] \subset \ker(\delta)$.

Ainsi, $\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X].}$

Donc d'après le théorème du rang, $\operatorname{rg}(\delta) = n$. Et d'après la question précédente, $\operatorname{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Comme $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X]) = n$, il s'ensuit que

$$\boxed{\operatorname{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X].}$$

B.3. Procédons par récurrence sur j.

Initialisation. La question précédente l'établit.

Transmission. Supposons que les relations soient vraies pour un certain $j \leqslant n-1$. Comme $\delta^{j+1} = \delta^j \circ \delta$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P \in \ker(\delta^{j+1}) \iff \delta(P) \in \ker(\delta^j).$$

D'une part, $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ d'après l'hypothèse de récurrence ; et d'autre part, $\deg(P) = \deg(\delta(P)) + 1$ d'après la question B.1. Donc

$$\delta(P) \in \ker(\delta^j) \iff P \in \mathbb{R}_j[X].$$

Ainsi, $\ker(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_j[X]$.

D'après le théorème du rang,

$$\operatorname{rg}(\delta^{j+1}) = n + 1 - (j+1) = n - j.$$

Puisque $\delta^{j+1} = \delta \circ \delta^j$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\deg(\delta^{j+1}(P)) = \deg(\delta^j(P)) - 1.$$

Et d'après l'hypothèse de récurrence, comme $\delta^j(P) \in \operatorname{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$, $\deg(\delta^j(P)) \leqslant n - j$ donc $\deg(\delta^{j+1}(P)) \leqslant n - j - 1 = n - (j+1)$. Ainsi, $\operatorname{Im}(\delta^{j+1}) \subset \mathbb{R}_{n-(j+1)}[X]$. Avec les dimensions, on en tire que $\operatorname{Im}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_{n-(j+1)}[X]$.

Ainsi, la transmission est acquise.

Conclusion. D'après le principe de récurrence,

$\boxed{\text{les relations (3) sont vraies pour tout } j \in [\![1, n]\!].}$

B.4. Puisque $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ et que τ et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ commutent, d'après le binôme de Newton,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \delta^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j.}$$

Donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\delta^k(P) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P).$$

B.5. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après les relations (3), $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, donc $\delta^n(P) = 0$. Alors, d'après la question précédente,

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) = 0.$$

En outre, avec la question A.2, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\tau^j(P) = P(X+j)$. Donc en évaluant le relation précédente en 0,

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.} \tag{4}$$

B.6.a. Comme $u^2 = \delta$, $\delta^2 = u^4$, donc comme polynôme en u, $\boxed{\delta^2 \text{ commute avec } u.}$

B.6.b. D'après le cours, on sait que pour deux endomorphismes qui commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre. Ici, cela entraine la stabilité par u de $\ker(\delta^2)$. Et $\ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$ d'après les relations (3). Ainsi, $\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.}$

B.6.c. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2 + bc = 0, & L_1 \\ b(a+d) = 0, & L_2 \\ c(a+d) = 1, & L_3 \\ bc + d^2 = 0. & L_4 \end{cases}$$

De L_3 on tire que $c \neq 0$ et $a + d \neq 0$. De L_2 on tire alors que $b = 0$. De L_1 et L_4 on tire donc que $a^2 = d^2 = 0$, donc $a = d = 0$. Cela entraine que $a + d = 0$, ce qui contredit l'équation L_3.

$\boxed{\text{Donc une telle matrice } A \text{ n'existe pas.}}$

B.6.d. D'après la question B.6.b, $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u. Donc u induit un endomorphisme $\widetilde{u}$ sur $\mathbb{R}_1[X]$. Bien-sûr, $\mathbb{R}_1[X] = \ker(\delta^2)$ est aussi stable par δ, lequel y induit donc un endomorphisme $\widetilde{\delta}$.

Considérons la base $\mathscr{B} = (P_1, P_2)$ de $\mathbb{R}_1[X]$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\widetilde{u})$ et $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\widetilde{\delta})$. Comme $u^2 = \delta$, $\widetilde{u}^2 = \widetilde{\delta}$, donc $A^2 = B$. En outre, $\delta(P_1) = 0$ et

$$\delta(P_2) = (X+1) - X = 1 = P_1.$$

Donc $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On est donc ramené à la question précédente, qui affirme que A n'existe pas.

$\boxed{\text{Donc il n'existe aucun endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta.}$

B.7.a. Soit $P \neq 0$ de degré d. D'après la question B.1, et une récurrence immédiate, pour tout $j \in [\![0, d]\!]$, $\deg(\delta^j(P)) = d - j$, donc puisqu'elle est échelonnée en degré,

$\boxed{\text{la famille } (\delta^j(P))_{0 \leqslant j \leqslant d} \text{ est libre.}}$

Donc $\mathrm{Vect}((\delta^j(P))_{0 \leqslant j \leqslant d})$ est de dimension $d+1$. Or $\mathrm{Vect}((\delta^j(P))_{0 \leqslant j \leqslant d}) \subset \mathbb{R}_d[X]$, donc

$\boxed{\mathrm{Vect}((\delta^j(P))_{0 \leqslant j \leqslant d}) = \mathbb{R}_d[X].}$

B.7.b. Soit $V \neq \{0\}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ. Considérons l'ensemble des degrés entiers des polynômes de V :

$$D = \{p \in \mathbb{N} \mid \exists P \in V,\ \deg(P) = p\}.$$

D n'est pas vide, car V contient au moins un polynôme non nul. D est majoré par n car tout polynôme de V est dans $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, D est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$: donc $d = \max(D)$ existe.

Soit donc $P \in V$ tel que $\deg(P) = d$. Comme V est stable par δ, pour tout $j \in [\![0, d]\!]$, $\delta^j(P) \in V$. Donc $\mathrm{Vect}((\delta^j(P))_{0 \leqslant j \leqslant d}) \subset V$. Donc $\mathbb{R}_d[X] \subset V$ d'après la question précédente.

Par ailleurs, puisque $d = \max(D)$, pour tout $Q \in V$, $\deg(Q) \leqslant d$, donc $V \subset \mathbb{R}_d[X]$.

Ainsi, $V = \mathbb{R}_d[X]$.

$\boxed{\text{Les sous-espaces vectoriels de } \mathbb{R}_n[X] \text{ stables par } \delta \text{ sont exactement les } \mathbb{R}_d[X] \text{ où } d \in [\![0, n]\!].}$