

Cinquième devoir à la maison

[E3A17]

Les questions étoilées sont réservées
aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^{n-1})$ sa base canonique.

Soient $a_1, \dots, a_n$, n réels vérifiant :

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n.$$

1. Montrer que l'application :

$$T : P \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_n))$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{R}^n$.

2. On note $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $L_i = T^{-1}(e_i)$, c'est-à-dire l'unique polynôme dont l'image par T est e_i .

Montrer que $\mathcal{B}' = (L_1, \dots, L_n)$ est une base de E puis déterminer les composantes d'un polynôme P quelconque de E dans cette base.

Dans la suite de l'exercice, on note $M = (m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

3. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 3$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ et $a_3 = 2$.

3.1. Donner, sans justification, les polynômes L_1 , L_2 et L_3 et expliciter la matrice M .

3.2.* Montrer que 1 est valeur propre de la matrice M et déterminer le sous-espace propre associé.

3.3. En déduire tous les polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant : $P(X) = P(0) + P(1)X + P(2)X^2$.

4. On revient au cas général.

4.1. Montrer que M est inversible. Calculer son inverse. (On pourra utiliser la question 2).

4.2. Établir la relation : $\sum_{i=1}^n L_i = 1$.

4.3. Montrer que l'on a : $\sum_{j=1}^n m_{1j} = 1$.

Montrer ensuite que pour tout $i \in \llbracket 2, n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} = 0.$$

4.4. Lorsque $a_1 = 1$, déterminer la somme des coefficients de chaque colonne de M .

5. Dans cette question, on suppose que $n \geq 4$ et soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall P \in E, \quad u(P) = Q$$

avec $Q(X) = P(0)L_1(X) + P(1)L_2(X) + P(2)L_3(X)$.

5.1. Déterminer $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$. Sont-ils supplémentaires ?

5.2.* Déterminer les éléments propres de u et caractériser géométriquement u .